Lezione 18 marzo 2026

mercoledì 18 marzo 2026 09:37

Esercizi:

Foglio 2, es. 2 c ; $3\left(\frac{4}{5}\cos t\right) + 4\cdot\left(-\frac{3}{5}\cos t\right) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\alpha(t) = \left(\underbrace{\frac{4}{5}\cos t}, 1 - \sin t, \underbrace{-\frac{3}{5}\cos t}\right)$$

ⓒ $\alpha(\mathbb{R})$ è una circonferenza piana

Un modo: calcolare $k(t)$ e $\tau(t)$;
se troviamo $k(t) = \text{cost} > 0$ e $\tau(t) \equiv 0$
$\Rightarrow$ la curva è un'elica, $\tau(t) \equiv 0 \Rightarrow$ è piana.

A meno di movimenti rigidi dello spazio,
è del tipo

$$\left(a\cos\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right),\ b=0$$

$$\left(a\cos\frac{t}{a},\ a\sin\frac{t}{a},\ 0\right)$$

Secondo modo:

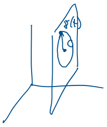
ricordo una circonferenza piana in $\mathbb{R}^3$

di centro C e contenuta nel piano

$H \ni C$ con giacitura $W_H = \text{Span}(v_1, v_2)$

con $\{v_1, v_2\}$ base ortonormale di W_H

e raggio r



$$\gamma(t) - C = \underbrace{r\cos\frac{t}{r}}\, v_1 + \underbrace{r\sin\frac{t}{r}}\, v_2$$

$$\gamma(t) = C + r\cos\frac{t}{r}\, v_1 + r\sin\frac{t}{r}\, v_2$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = C_1 + \overset{=1}{r}\cos\frac{t}{r}\, v_{11} + \overset{=1}{r}\sin\frac{t}{r}\, v_{12} = \frac{4}{5}\cos t \\ y(t) = C_2 + \overset{=1}{r}\cos\frac{t}{r}\, v_{21} + r\sin\frac{t}{r}\, v_{22} = \underline{1 - \sin t} \\ z(t) = C_3 + \overset{=1}{r}\cos\frac{t}{r}\, v_{31} + r\sin\frac{t}{r}\, v_{32} = -\frac{3}{5}\cos t \end{cases}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{t}{r} = t \quad \Rightarrow \quad r = 1$ perché entrambe

PLA, quindi la variabile è la stessa oppure

la sua opposta, $r = \pm 1$

inoltre: $(C_1, C_2, C_3) = (0, 1, 0)$

$$\|v_1\|^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1, \quad \|v_2\|^2 = 1$$

$$n_1 \cdot n_2 = 0$$

$\Longrightarrow$ $\alpha(t)$ è la PLA di una circonferenza

di raggio $r=1$, centro $C=(0,1,0)$

su H con $W_H = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Scriviamo un'eq. cart. di H:

$P=(x,y,z) \in H \iff \overrightarrow{CP} \in W_H$

$$\Updownarrow \qquad \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \in W_H$$

$$\det \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ -3/5 & 0 & z \end{pmatrix} = 0$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{4}{5} z + \frac{3}{5} x\right) = 0$$

$$\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} z = 0 \quad / \cdot 5$$

$$3x + 4z = 0$$

Foglio 3, es. 2.

$\alpha : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\alpha(t) = \left(t, 1+\frac{1}{t}, -1+\frac{1}{t}\right)$

ⓐ verificare che $\alpha((0,+\infty))$ è piana.

piano affine in $\mathbb{R}^3$

$ax+by+cz=d$

$\exists ?\ a,b,c,d$ t.c. $a\underline{t}+b\underline{\left(1+\frac{1}{t}\right)}+c\underline{\left(-1+\frac{1}{t}\right)}=d \quad \forall t \in (0,+\infty)$

faccio tentativi: $0 \cdot t + 1 \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right) - 1 \cdot \left(-1+\frac{1}{t}\right)$

$= 1+\frac{1}{t}+1-\frac{1}{t} = 2 = d$

$\Rightarrow y-z=2$

$\Rightarrow$ la curva è piana; da quanto visto

H_t piano osc. affine in $\alpha(t)$

è costante ed è uguale al piano della

curva $H_t : y-z=2$

$$\Rightarrow \boxed{b(t) = \pm \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

poiché: se $ax+by+cz=d$ è piano H

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp H$$

Calcoliamo ora tutti i versori $T(t)$, $n(t)$, $b(t)$ e $k(t)$.

- $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \|\alpha'(t)\|^2 = 1 + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^4}$$

$$= 1 + \frac{2}{t^4}$$

$$= \frac{t^4+2}{t^4} \quad , \quad \|\alpha'(t)\| = \frac{\sqrt{t^4+2}}{t^2}$$

$$\Rightarrow T(t) = = \frac{t^2}{\sqrt{t^4+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t^4+2}} \begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{t^3} \\ 2/t^3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t^2 & 2/t^3 \\ -1/t^2 & 2/t^3 \end{pmatrix}$$

Ricordo che $k(t) = \dfrac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/t^3 \\ 2/t^3 \end{pmatrix}$$

Oss. visto nella discussione generale per trovare le formule in par. non PLA che se α è biregolare in t, allora $\dfrac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = b(t)$

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2 = \frac{4}{t^6} + \frac{4}{t^6} = \frac{8}{t^6}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{2\sqrt{2}}{t^3} \cdot \frac{t^6}{\left(\sqrt{2+t^4}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2}\, t^3}{\left(\sqrt{2+t^4}\right)^3}$$

$k(t) = 0 \iff t = 0$, ma non appartiene al dominio $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ NO flessi, è biregolare

Controllo il binormale (ma so già che è costante)

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2 = 0 + \frac{4}{t^6} + \frac{4}{t^6} = \frac{8}{t^6}$$

$$\frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\| \quad \cdot \quad \|} = \frac{t^3}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2/t^3 \\ 2/t^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infine $n(t)$

$$n(t) = b(t) \wedge T(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t^2/\sqrt{t^4+2} \\ -1/\sqrt{t^4+2} \\ -1/\sqrt{t^4+2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t^4+2}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ t^2/\sqrt{2} \\ t^2/\sqrt{2} \end{pmatrix} = n(t)$$

Infine $\tau(t) = \dfrac{-(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$

Verifica: piano osculatore

$$W_t = \text{Span}(T(t), n(t)) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \right)$$

$\downarrow$

$\alpha'(t)$

eq. cartesiana: $\det \begin{pmatrix} t^2 & 2 & x \\ -1 & t^2 & y \\ -1 & t^2 & z \end{pmatrix} = 0$

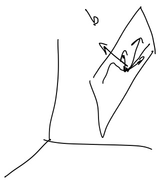
$$x(-t^2+t^2) - y(t^4+2) + z(t^4+2) = 0 \quad /:(t^4+2)$$

$$-y + z = 0$$

pass. per $t=1$: $\alpha(1) = (1, 2, 0)$

$$-y+z = d, \quad -2+0 = d, \quad d = -2$$

$$\Rightarrow -y+z = -2$$

$$y - z = 2$$