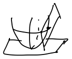
Lezione 12 maggio 2026

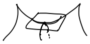
martedì 13 maggio 2025 09:14

Per curve visto signif. geometrico di curvatura e torsione ; analog.

Significato geometrico di K :



$K > 0$



$K < 0$

Vogliamo verificare che se $K>0$: sup localmente $\subseteq$ in uno di due semispazi indiv. da T_pS

$K<0$: sup loc. sta in entrambi semispazi

Teorema: S sup regolare , $p \in S$
$\Rightarrow \exists\, f : U \to S$, $p \in f(U)$
par. loc. regolare t.c.

$$\partial_u f \cdot \partial_v f = 0 \quad \text{su } U$$

par. ORTOGONALE ; cioè $F \equiv 0$

* * *

OSS.: È possibile trovare PAR. ORTONORMALE in p. In generale, però, non possiamo supp. $\{\partial_u f, \partial_v f\}$ ortonormale su U ; altrimenti per Theo. Egregium, tutte le sup. sarebbero loc. isometriche tra loro, e avrebbero tutte curvatura $K \equiv 0$.

Vediamo come ortonormalizzare $\{\partial_u f, \partial_v f\}$ in P:

Supp. che f sia ortogonale , $P = f(u_0, v_0)$
e definisco

$$\tilde f(\tilde u, \tilde v) := f\left(u_0 + \frac{\tilde u}{\|\partial_u f(u_0, v_0)\|},\ v_0 + \frac{\tilde v}{\|\partial_v f(u_0, v_0)\|}\right)$$

se $\tilde U = t_{-\binom{u_0}{v_0}}(U)$, $\tilde f : \tilde U \to S$

$\rightarrow$ traslazione è omeom.
$\Rightarrow \tilde U$ è aperto

$$\tilde f(0,0) = f(u_0, v_0) = P$$

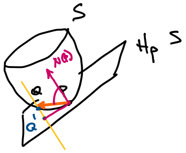
$$d_{\tilde u}\tilde f(0,0) = \frac{\partial_u f(u_0,v_0)}{\|\partial_u f(u_0,v_0)\|}$$

$$d_{\tilde v}\tilde f(0,0) = \frac{\partial_v f(u_0,v_0)}{\|\partial_u f(u_0,v_0)\|}$$

ANALISI LOC DI UNA SUP.

Prop.: S regolare, $p \in S$. Allora:

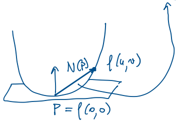
- se P $\overset{K(p)>0}{\text{ellittico}}$, $\exists \overset{\text{aperto}}{V} \ni p$, $V \subseteq S$ t.c. tutti i punti di V appartengono allo stesso semispazio risp. H_pS: piano affine tg in p
- P $\overset{k(p)<0}{\text{iperbolico}}$, $\forall\, V: p \in V \subseteq S$ aperto ci sono punti di V in entrambi i sottospazi determinati da H_pS.



Dim.: Scelgo $f: U \to S$ t.c. $P = f(0,0)$
f ORTOG. su U, e ORTONORM. in P.

Cons. la DISTANZA con SEGNO tra $f(u,v)$ e H_pS

$$d(u,v) := \overbrace{(f(u,v) - f(0,0))}^{\vec{PQ}} \cdot N(P)$$



$d: U \to \mathbb{R}$

$Q = f(u,v) \in f(U)$

$\vec{PQ} = f(u,v) - f(0,0)$

$d(u,v) > 0$ se $f(u,v) \in$ semispazio che contiene $N(P)$

$d(u,v) < 0$ se $f(u,v) \in$ semisp. opposto

Uso la FORMULA DI TAYLOR per f

In opp. intorno di $(0,0)$

$$\underbrace{f(u,v) - f(0,0)}_{} = \underbrace{\partial_u f(0,0)\cdot u + \partial_v f(0,0)\cdot v}_{}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\partial_{uu} f(0,0)\, u^2 + 2\,\partial_{uv} f(0,0)\, uv + \partial_{vv} f(0,0)\cdot v^2\right)$$

$$+ \bar{R}(u,v)$$

con $$\boxed{\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\bar{R}(u,v)}{u^2+v^2} = 0}$$

$$d(u,v) = \left(f(u,v) - f(0,0)\right)\cdot N(p)$$

| Taylor e $\partial_u f(0,0) \perp N(p)$
$\partial_v f(0,0) \perp N(p)$

$$= \frac{1}{2}\Big(u^2 \big(\overbrace{\underbrace{\partial_{uu} f(0,0)\cdot N(p)}_{}}^{e}\big) + 2uv\,\overbrace{\big(\underbrace{\partial_{uv} f(0,0)\cdot N(p)}_{}\big)}^{f}$$
$$+ v^2\, \underbrace{\partial_{vv} f(0,0)\cdot N(p)}_{g}\Big) + \underbrace{\bar{R}(u,v)\cdot N(p)}_{R(u,v)}$$

$$= \frac{1}{2}\overbrace{\big(\underbrace{u^2 e + 2uvf + v^2 g}_{(u\ \ v)\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}}\big)}^{} + R(u,v)$$

|

base ortonorm. di T_pS

$$= \frac{1}{2}\, \mathrm{II}_p\big(\underbrace{u\,\partial_u f(0,0) + v\,\partial_v f(0,0)}_{w}\big) + R(u,v)$$

$$\|w\|^2 = u^2 + v^2 \;; \quad w := u\,\partial_u f(0,0) + v\,\partial_v f(0,0)$$

$$\underline{R(u,v) = \bar{R}(u,v)\cdot N(p)} \;/\; \underbrace{\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\bar{R}(u,v)}{u^2+v^2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{}$$

$$\bar{R} : U \to \mathbb{R}^3$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{R(u,v)}{(u^2+v^2)} = 0 \in \mathbb{R}, \qquad R : U \to \mathbb{R}$$

Supp. ora P ellittico: $\underbrace{K = k_1 \cdot k_2 > 0}$

e supp. $\boxed{k_1 > 0 \qquad k_2 > 0}$

$\mathrm{II}_p(\underbrace{w})$ e cons. $\mathrm{II}_p\left(\frac{w}{\|w\|}\right) > 0$

$w = u\, d_u f + v\, d_v f$; $\|w\|^2 = (u\, d_u f + v\, d_v f)\cdot(u\, d_u f + v\, d_v f)$

ORTON. $\{d_u f, d_v f\}$ $= u^2 + v^2$

$(u,v) \neq (0,0)$

- $$\frac{d(u,v)}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{II}_p(w)}{\|w\|^2} + \frac{R(u,v)}{u^2+v^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{II}_p\left(\frac{w}{\|w\|}\right) + \frac{R(u,v)}{u^2+v^2} > \frac{k_2}{4} > 0$$

$\mathrm{II}_p(\lambda w) = \lambda^2\, \mathrm{II}_p(w)$

$\geq \frac{1}{2} k_2$

$\exists\, W \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

$W \ni (0,0)$: $\forall (u,v) \in W$

t.c. $\left|\frac{R(u,v)}{u^2+v^2}\right| < \frac{k_2}{4}$

cioè $-\frac{k_2}{4} < \frac{R(u,v)}{u^2+v^2} < \frac{k_2}{4}$

$$\Longrightarrow \frac{d(u,v)}{\underbrace{u^2+v^2}_{>0}} > \frac{k_2}{4} > 0 \quad \text{su } (u,v) \in W$$

$\Longrightarrow d(u,v) > 0$

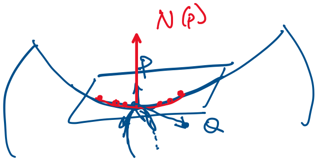
Se $k_1 < 0$ e $k_2 < 0$ analogo : si trova

$d(u,v) < 0$ in intorno di $(0,0)$

• Se P iperbolico

$k_1 > 0 \qquad k_2 < 0$

Ci concentriamo lungo le 2 direz. principali e_1 e e_2

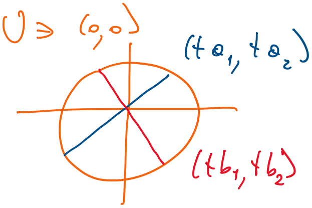


Siano e_1 & e_2 direz. principali in T_pS

$$e_1 = \underline{\boxed{a_1}\,\partial_u f + \boxed{a_2}\,\partial_v f}$$

$$e_2 = b_1 \partial_u f + b_2 \partial_v f$$

$d(ta_1, ta_2)$;



$(ta_1, ta_2) \in \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) := f(ta_1, ta_2)$ è una curva $\subseteq S$

$t = 0$: $f(0,0) = P$

$$\alpha'(t) = a_1 \partial_u f + a_2 \partial_v f$$

$$\alpha'(0) = e_1$$

$$\underbrace{d(ta_1, ta_2)} = (\underbrace{f(ta_1, ta_2) - f(0,0)}) \cdot N(p)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{II_p(ta_1 \partial_u f + ta_2 \partial_v f)} + \underline{R(ta_1, ta_2)}$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \underbrace{\mathrm{II}_p(e_1)}_{\boxed{k_1} > 0} + \underbrace{R(ta_1, ta_2)}$$

$$\frac{d(ta_1, ta_2)}{t^2} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} k_1}}_{> 0} + \boxed{\frac{R(ta_1, ta_2)}{t^2}} \xrightarrow{t \to 0} 0 \quad \text{Esercizio}$$

OSS: $\|(ta_1 d_u f + t a_2 d_v f)\|^2 = \|t e_1\|^2 = t^2 \cdot \|e_1\|^2 = t^2$

$= \|(u, v)\|^2$

per t suff. piccolo, $\underbrace{d(ta_1, ta_2)} > 0$

Stesso rag. per $e_2 = b_1 d_u f + b_2 d_v f$

cons. $d(tb_1, tb_2)$ rifacc. rag.

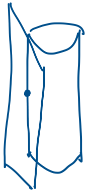
$$\frac{\boxed{d(tb_1, tb_2)}}{\boxed{t^2}} = \underbrace{\frac{1}{2} k_2}_{\boxed{< 0}} + \boxed{\frac{R(tb_1, tb_2)}{t^2}} < 0$$

$$\downarrow$$
$$0$$

< 0 per t suff. piccolo

OSS.: Se $K = 0$ in P, può succ. di tutto

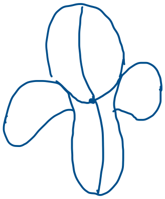
Es.:



Es.: Sella di scimmia

$z = u^3 - 3v^2 u$

$(0,0,0) = P$ è planare



Infine, vediamo che $\underbrace{E, F, G, e, f, g}$

e le eq. di Gauss e Codazzi – Mainardi

determinano, a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$,

una sup. regolare.

Eq. Gauss: $\Psi(\Gamma^i_{jk}) = -K \cdot E$

$$\overset{!}{=} -\frac{eg-f^2}{EG-F^2} \cdot E \qquad \circledast$$

TEOREMA DI BONNET:

Siano $E, F, G, e, f, g : U \to \mathbb{R}$ C^∞

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, t.c.

- $E > 0$, $G > 0$,
- $EG - F^2 > 0$
- le funzioni sodd. formalmente l'eq. di Gauss e le eq. di Codazzi-Mainardi

Allora: $\forall\, q \in U$, $\exists$ un aperto W

$q \in W \subseteq U$ e esiste

$f : W \to \mathbb{R}^3$ t.c. $f(W)$ sia sup. regolare con coeff. E, F, G, e, f, g.

Inoltre, è unica a meno di movimenti rigidi.

Dim. Si usa teoria di PDE.