

## 7. CALCOLO NON LINEARE DELLE STRUTTURE IN C.A.

### 7.1. Introduzione

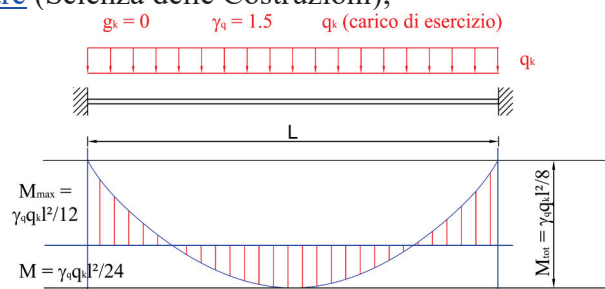
Il metodo semiprobabilistico agli Stati Limite prevede che l'aleatorietà dei valori di R ed S viene tenuta in conto, in modo semplificato, introducendo opportuni coefficienti parziali di sicurezza  $\gamma$ , distinti in coefficienti minorativi  $\gamma_m$  per la resistenza dei materiali e in maggiorativi  $\gamma_f$  per le azioni.

È noto che la verifica agli SLU consiste in un confronto diretto fra i valori di progetto  $R_d$  e  $S_d$ , verificando che la sollecitazione di progetto non ecceda la resistenza.

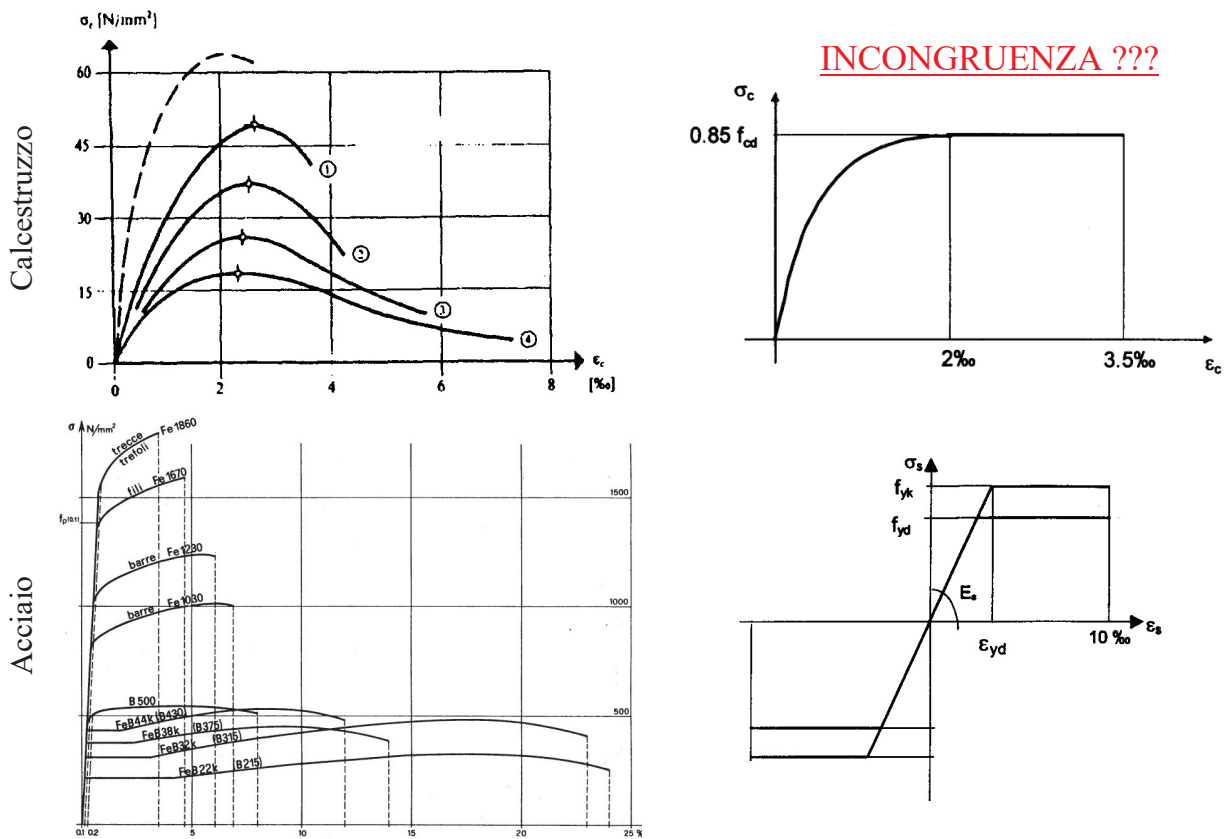
$$R_d \geq S_d$$

dove:

$S_d$  rappresentano le sollecitazioni di progetto, calcolate con una analisi della struttura di tipo elastico lineare (Scienza delle Costruzioni);



$R_d$  rappresentano le resistenze di progetto, calcolate con il metodo degli SLU, considerando i legami costitutivi di tipo elasto-plastici;



Per quanto detto in precedenza la situazione limite può essere raggiunta con diverse modalità; tuttavia si ha sempre la necessità di determinare lo stato di sollecitazione (N,M,V,T) nel modo più aderente all'effettivo comportamento della struttura. Nasce quindi l'esigenza di **considerare tutte le non-linearità** che si potrebbero manifestare, in particolare:

- non linearità del materiale: le leggi costitutive dei materiali non sono lineari;
- non linearità strutturali o geometriche: a causa della deformazione degli elementi strutturali, le forze normali possono dare luogo a momenti flettenti aggiuntivi in generale non trascurabili (effetti del II ordine)

Nel caso di una **struttura isostatica**, il raggiungimento del momento plastico in una sezione comporta la formazione di una cerniera plastica (a momento costante si ha aumento della rotazione), quindi la struttura diventa labile e si ha il collasso.

In una **struttura iperstatica**, la formazione di una cerniera plastica comporta la perdita di un grado di iperstaticità, diventando al più isostatica e preservando comunque una riserva di resistenza, impedendo il collasso.

Inoltre non è detto che un elemento strutturale (c.a. o acciaio) possa raggiungere/permettere la plasticizzazione del materiale: basti pensare al fenomeno dell'instabilità per carico di punta, instabilità laterale delle travi snelle o l'instabilità locale dei profili metallici.

Da questi semplici esempi si capisce che **non è sempre possibile spingersi oltre l'analisi elastica**.

La normativa infatti prevede per le strutture in c.a. le seguenti analisi:

– analisi elastica-lineare, con / senza redistribuzione dei momenti:

L'analisi elastica lineare può essere usata per valutare gli effetti delle azioni sia per gli stati limite di esercizio sia per gli stati limite ultimi.

Le analisi saranno effettuate assumendo:

- a) sezioni interamente reagenti con rigidezze valutate riferendosi al solo calcestruzzo;
- b) relazioni tensione deformazione lineari;
- c) valori medi del modulo d'elasticità.

Per le sole verifiche agli stati limite ultimi, i risultati dell'analisi elastica possono essere modificati con una redistribuzione dei momenti, nel rispetto dell'equilibrio e delle capacità di rotazione plastica delle sezioni dove si localizza la redistribuzione.

– analisi plastica

L'analisi plastica può essere usata per valutare gli effetti di azioni statiche e per i soli stati limite ultimi. Al materiale si può attribuire un diagramma tensioni-deformazioni rigido-plastico verificando che la duttilità delle sezioni dove si localizzano le plasticizzazioni sia sufficiente a garantire la formazione del meccanismo previsto

– analisi non lineare

L'analisi non lineare può essere usata per valutare gli effetti di azioni statiche e dinamiche, sia per gli stati limite di esercizio, sia per gli stati limite ultimi, a condizione che siano soddisfatti l'equilibrio e la congruenza.

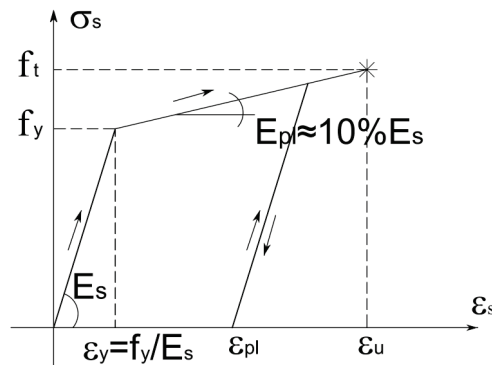
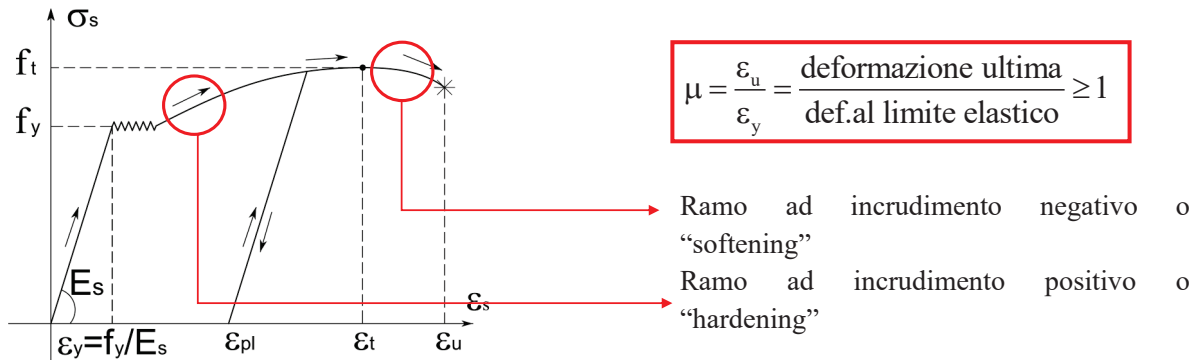
Al materiale si può attribuire un diagramma tensioni-deformazioni che ne rappresenti adeguatamente il comportamento reale, verificando che le sezioni dove si localizzano le plasticizzazioni siano in grado di sopportare allo stato limite ultimo tutte le deformazioni non elastiche assunte nell'analisi, tenendo in appropriata considerazione le incertezze.

## 7.2. La Duttilità

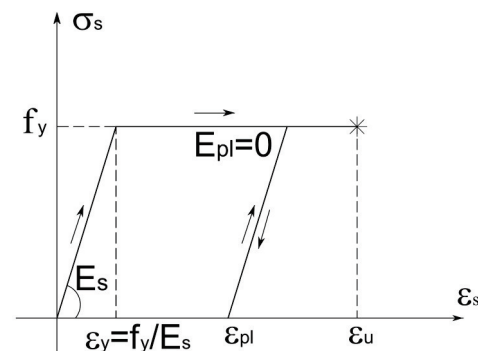
Il **concetto generale di duttilità**: “è la capacità di un materiale, una sezione, un elemento o di una struttura nella sua complessità, di sopportare deformazioni anelastiche anche di elevata ampiezza, una volta superato un valore di tensione/forza - detto di primo snervamento -”; in termini energetici, è la capacità di assorbire energia in modo anelastico, senza sensibili riduzioni della resistenza.

### 7.2.1. Duttilità al livello di “materiale”

Un materiale è duttile quanto maggiore è la deformazione che può sopportare dopo il primo snervamento.

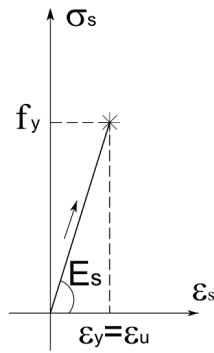


LEGAME ELASTO-PLASTICO  
INCRUDENTE



LEGAME ELASTO-PLASTICO  
PERFETTO  
o  
LEGAME ELASTICO  
PERFETTAMENTE PLASTICO

COMPORAMENTO DUTTILE  
 $\mu > 1$



LEGAME ELASTO-FRAGILE

COMPORAMENTO FRAGILE

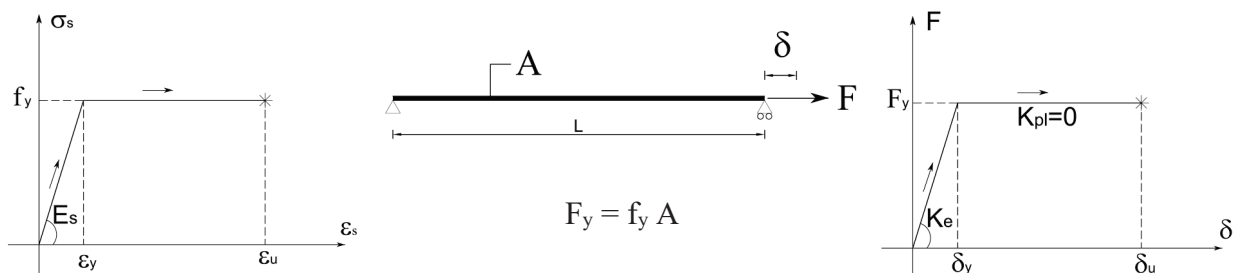
$$\mu = 1$$

Se una struttura in cemento armato è duttile:

- si evitano collassi fragili;
- la capacità portante è indipendente da distorsioni e cedimenti;
- si evitano problemi di incertezze sulla natura dei vincoli, incertezze dovute alle variazioni termiche e da ritiro;
- è possibile ricorrere alla redistribuzione delle sollecitazioni, ottimizzando la progettazione;
- ci si può avvalere della dissipazione energetica per aver un buon comportamento strutturale in condizioni di sismiche.

7.2.2. Duttilità al livello di "elemento Tirante"

Un elemento strutturale è duttile quanto maggiore è lo spostamento che può sopportare dopo il primo snervamento.



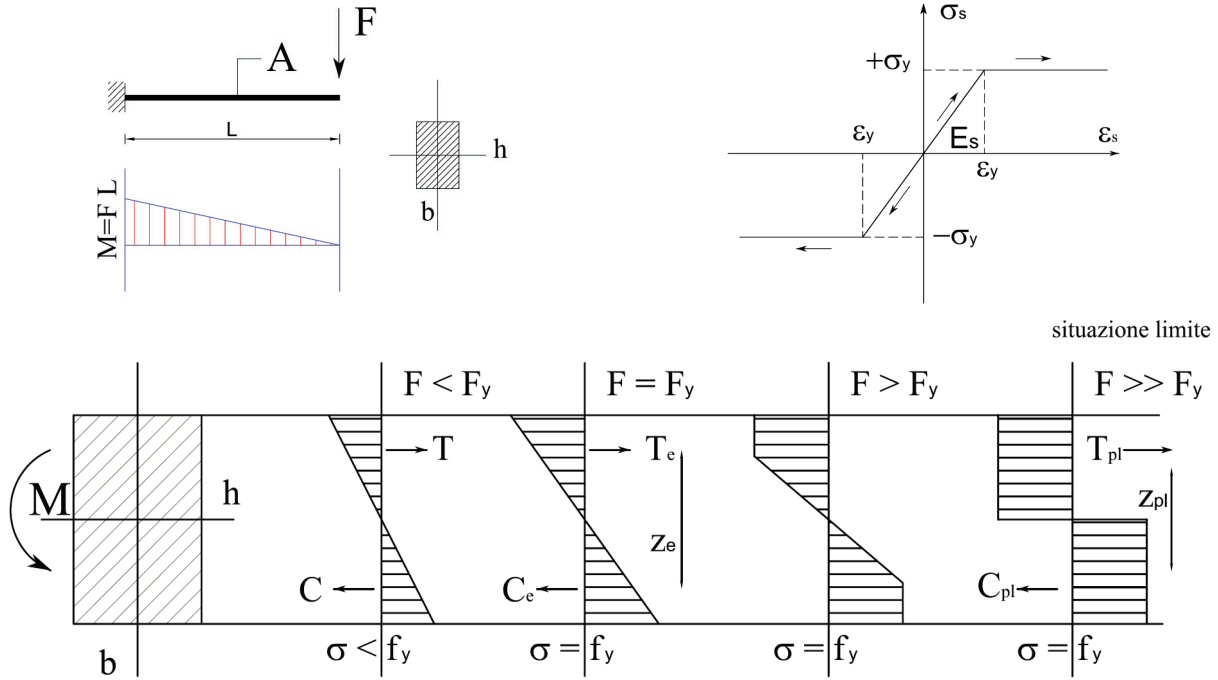
La duttilità è definita come:

$$\mu = \frac{\delta_u}{\delta_y} = \frac{\text{allungamento ultimo}}{\text{all. al limite elastico}} \geq 1$$

La rigidezza elastica vale  $K_e = \frac{F}{\delta} = \frac{E_s \cdot A}{L}$  dato che  $\delta = \frac{F \cdot L}{E_s \cdot A}$

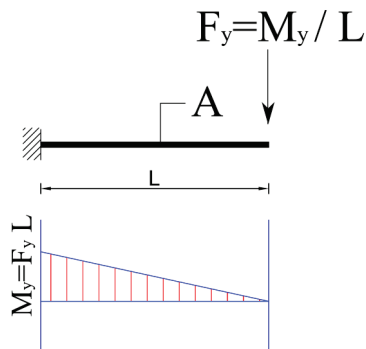
7.2.3. Moduli di Resistenza e Fattore di Forma

Consideriamo un mensola incastrata di sezione rettangolare con un carico F in punta.



In condizioni di snervamento:

$$T_e = C_e = \frac{1}{2} \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \quad \text{con} \quad z_e = \frac{2}{3} h$$



$M_y =$  momento di snervamento, che corrisponde ad avere ai lembi della sezione una tensione pari a quella di snervamento;

$$M_y = W_e \cdot f_y$$

$W_e =$  Modulo ELASTICO di resistenza

In una sezione rettangolare il modulo di resistenza elastico vale:

$$W_e = \frac{J}{h} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

In alternativa è possibile calcolarlo come:

$$M_y = \frac{1}{2} \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \cdot \frac{2}{3} h = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_y$$

In condizioni di completa plasticizzazione:  $T_{pl} = C_{pl} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y$  con  $z_{pl} = \frac{1}{2} h$

Il momento vale

$$M_{pl} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_y \cdot \frac{1}{2} h = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot f_y = W_{pl} \cdot f_y$$

$M_{pl}$  = **Momento plastico**, che corrisponde a raggiungere la completa plasticizzazione della sezione

$W_{pl}$  = **Modulo di resistenza PLASTICO**

**I moduli elastici e plastici dipendono esclusivamente dalla geometria della sezione.**

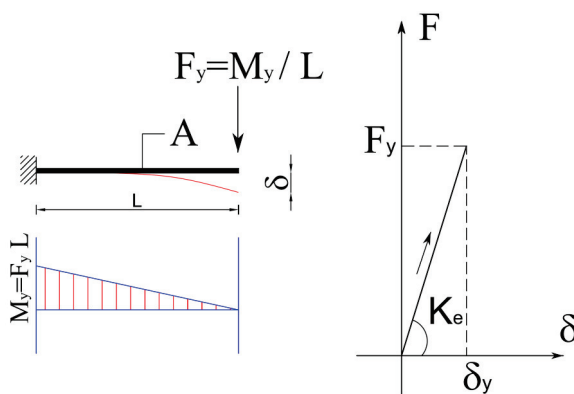
Si definisce **Fattore di Forma** di una sezione il rapporto fra il modulo plastico e quello elastico:

$$Z = \frac{W_{pl}}{W_e}$$

Nel caso di sezioni rettangolari vale:  $Z = \frac{b \cdot h^2}{4} / \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{6}{4} = 1.5$

#### 7.2.4. Duttilità al livello di "Sezione"

Consideriamo nuovamente la mensola con momento flettente al limite dello snervamento:

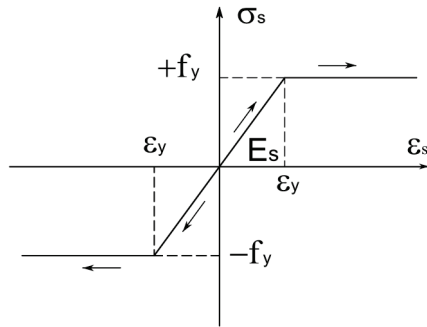
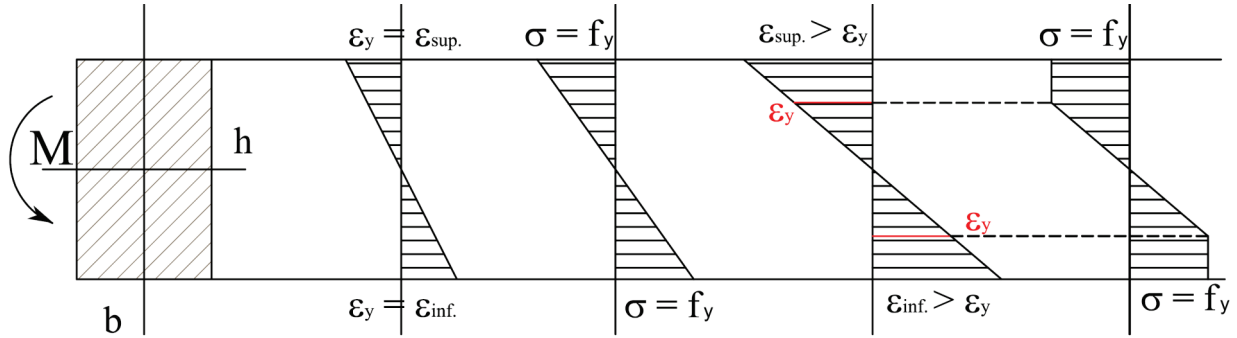


$$\delta_y = \frac{F_y L^3}{3EJ}$$

$$F_y = \frac{M_y}{L} = \frac{W_e f_y}{L}$$

In corrispondenza dell'incastro, sezione maggiormente sollecitata a flessione, sia ha lo snervamento delle fibre tese superiori e di quelle compresse inferiori con plasticizzazione locale e conseguente formazione della cerniera plastica.

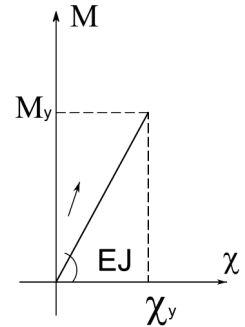
Nel momento in cui inizia a plasticizzare si hanno i seguenti diagrammi:



Si definisce la **curvatura al limite elastico**:

$$\chi_y = \frac{|\epsilon_{sup}| + |\epsilon_{inf}|}{h} = \frac{2\epsilon_y}{h}$$

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$



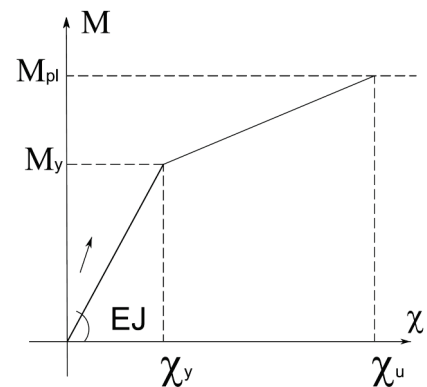
Si può aumentare la curvatura  $\chi$  fin quando si arriva alla deformazione ultima  $\epsilon_u$  della fibra può sollecitata e poi alla rottura della stessa.

La **curvatura ultima** è pari a : 
$$\chi_u = \frac{|\epsilon_{u,sup}| + |\epsilon_{u,inf}|}{h} = \frac{2\epsilon_u}{h}$$

Ricordandoci che il **Fattore di Forma** è pari a : 
$$Z = \frac{W_{pl}}{W_e} = 1.5 \quad (\text{sezioni rettangolari})$$

si ha:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= W_e \cdot f_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_y = \\ M_{pl} &= W_{pl} \cdot f_y = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot f_y = \end{aligned} \right\} M_{pl} = 1.5 \cdot M_y$$



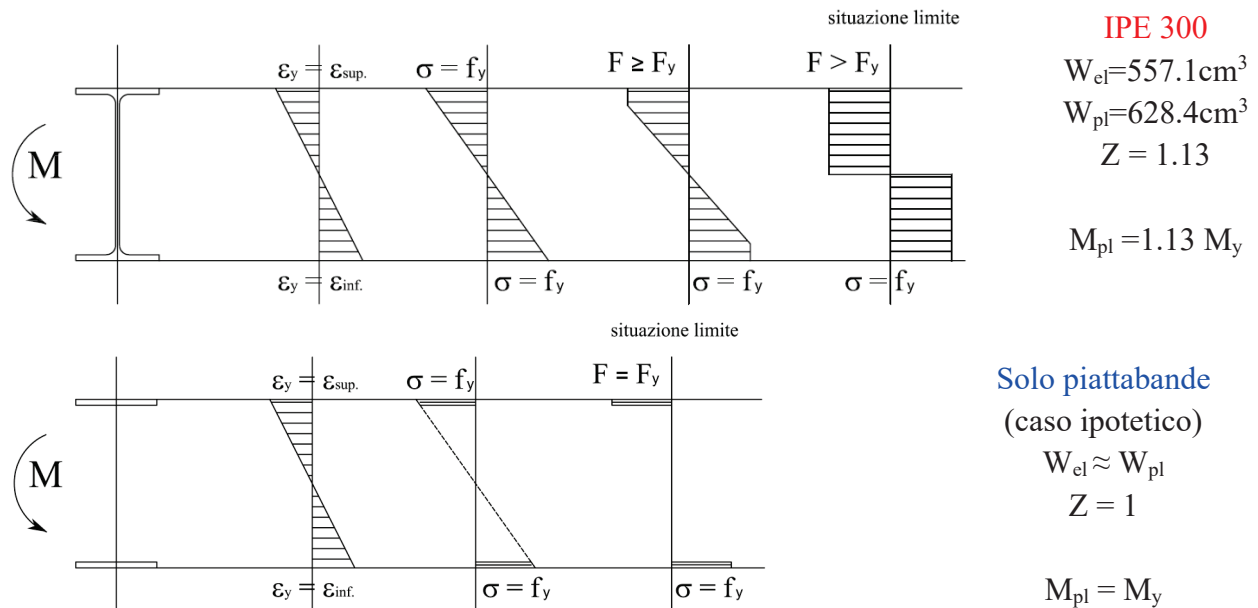
La **DUTTILITÀ DI SEZIONE** è definita come:

$$\mu = \frac{\chi_u}{\chi_y} = \frac{\text{curvatura ultima}}{\text{curv. al limite elastico}} \geq 1$$

OSS:

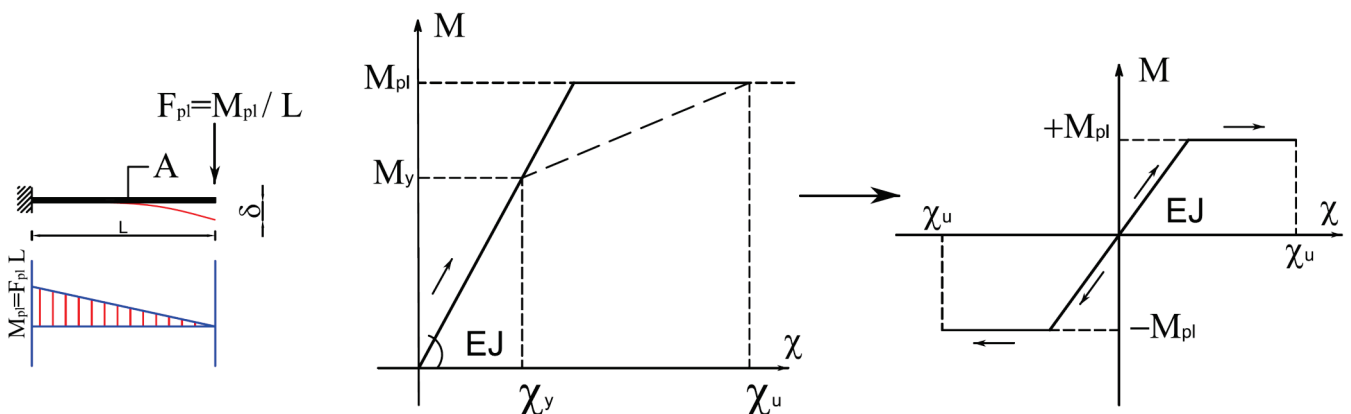
“Il rapporto fra il momento resistente plastico ed elastico dipende esclusivamente dai moduli resistenti e quindi dalle caratteristiche geometriche della sezione”.

Infatti se consideriamo:



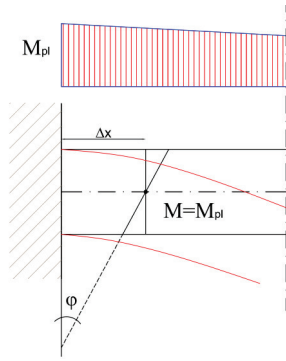
### 7.2.5. Cerniera plastica

Consideriamo nuovamente la mensola con un legame teorico Momento-Curvatura di tipo elastico-perfettamente plastico: è una forzatura in quanto nella realtà si ha sempre un tratto di incrudimento, più o meno esteso a seconda del tipo di sezione.



Ipotizziamo che la sezione più sollecitata raggiunga il momento plastico; in corrispondenza di un ulteriore aumento della sollecitazione esterna questa non può più riprendere momento ma inizia a ruotare fino alla curvatura ultima: si è formata una cerniera plastica.

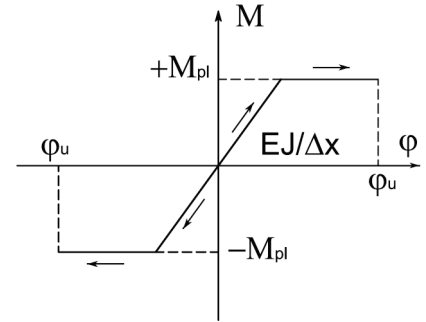
In realtà esiste un tratto finito di trave che raggiunge il momento plastico, si plasticizza e ruota



$$\varphi(x) = \int_0^{\bar{x}} \chi(x) dx = \int_0^{\bar{x}} \frac{M}{EJ}(x) dx$$

$$\varphi = \bar{\chi} \Delta x$$

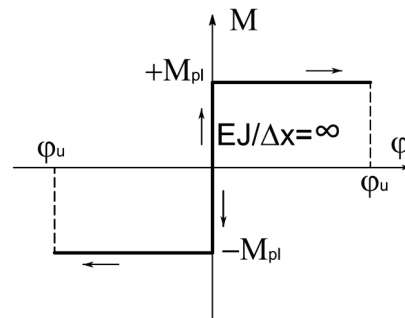
$\bar{\chi}$  = curvatura media  
 $\Delta x = l_p$  lunghezza cerniera plastica



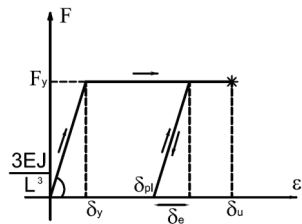
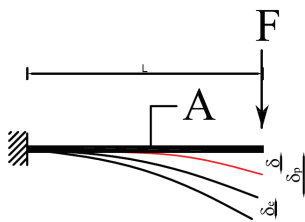
Il tratto  $\Delta x$  è molto piccolo, quindi si può fare un'ulteriore semplificazione, considerando un legame Momento-Curvatura rigido-plastico

Tipico legame che rappresenta un cerniera "arrugginita":

resiste e non ruota fino a  $M_{pl}$ , poi cede ed inizia a ruotare senza riprendere ulteriore momento

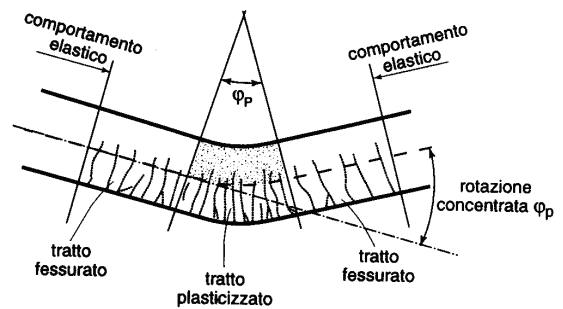
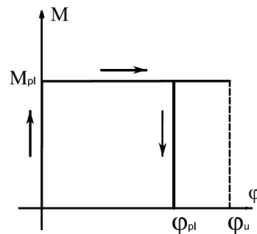
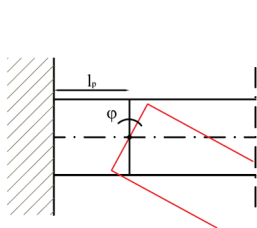


7.2.6. Duttilità al livello di "elemento flessionale"



La **duttilità di una mensola** è definita come:

$$\mu = \frac{\delta_u}{\delta_y} = \frac{\text{freccia ultima}}{\text{freccia al limite elastico}} \geq 1$$

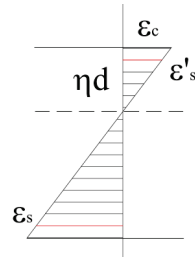
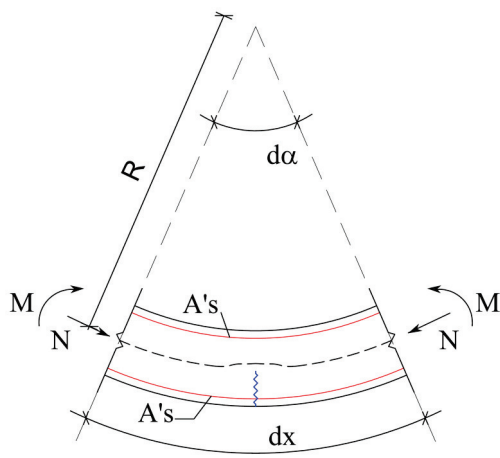


N.B.:

la **curvatura  $\chi$**  è una caratteristica della sezione  
 la **rotazione  $\varphi$**  è una caratteristica del concio di trave

**7.3. Diagramma Momento-Curvatura e Duttilità di una sezione in c.a.**

Consideriamo un tronco di trave in c.a. soggetto a momento M e sforzo normale N costanti.



$$Rd\alpha \cong dx$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \chi$$

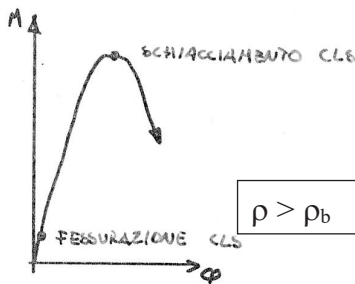
$$\rightarrow \chi = \frac{1}{R}$$

per un concio in c.a. di lunghezza unitaria  $dx = 1m$ , si ha

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{\epsilon_c}{\eta d} = \frac{\epsilon_s}{(1-\eta)d} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d} = \chi$$

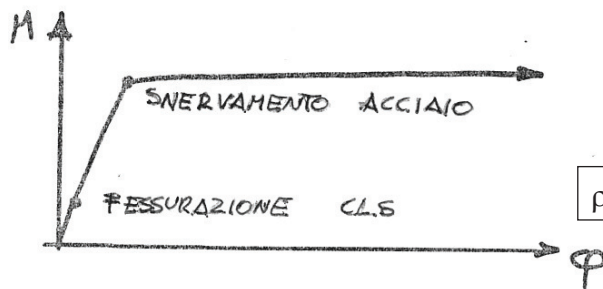
Il diagramma Momento-Curvatura di una sezione in c.a. può essere essenzialmente di due tipi, a seconda della quantità di armatura presente, cioè del rapporto geometrico di armatura  $\rho$ .

Se chiamiamo  $\rho_b$  la percentuale di armatura che comporta la rottura bilanciata, si ha



Comportamento **FRAGILE**

prevalenza del comportamento fragile del cls



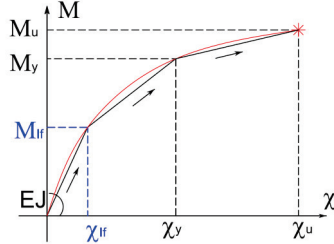
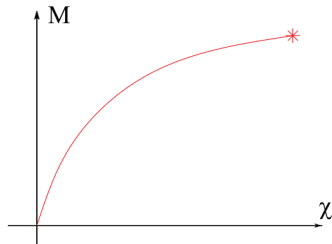
Comportamento **DUTTILE**

prevalenza del comportamento plastico/duttile delle armature

all'aumentare della deformazione, l'asse neutro si sposta verso l'alto con un conseguente leggero aumento del momento res. (aumento del braccio a forza costante), quindi tratto leggermente incrudente.

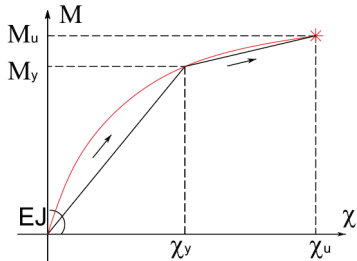
**N.B.:** Per avere strutture inflesse duttili, bisogna avere sempre  $\rho < \rho_b$  cioè rotture in campo 2 o 3

Vediamo ora come un diagramma reale  $M-\chi$  può essere schematizzato ai fini del calcolo.



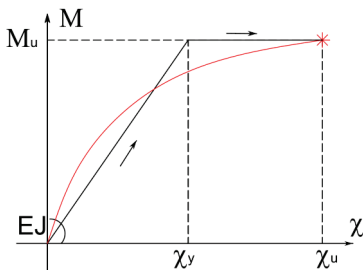
**Curva TRILATERA**

È quella più aderente alla realtà, riesce a rappresentare sia la prima fessurazione, sia lo snervamento/plasticizzazione che il leggero aumento del momento dopo lo snervamento delle barre



**Curva BILATERA INCRUDENTE**

Rappresentazione meno precisa, non riesce a cogliere la variazione di rigidezza dopo la prima fessurazione. Può rappresentare in maniera precisa le travi già fessurate

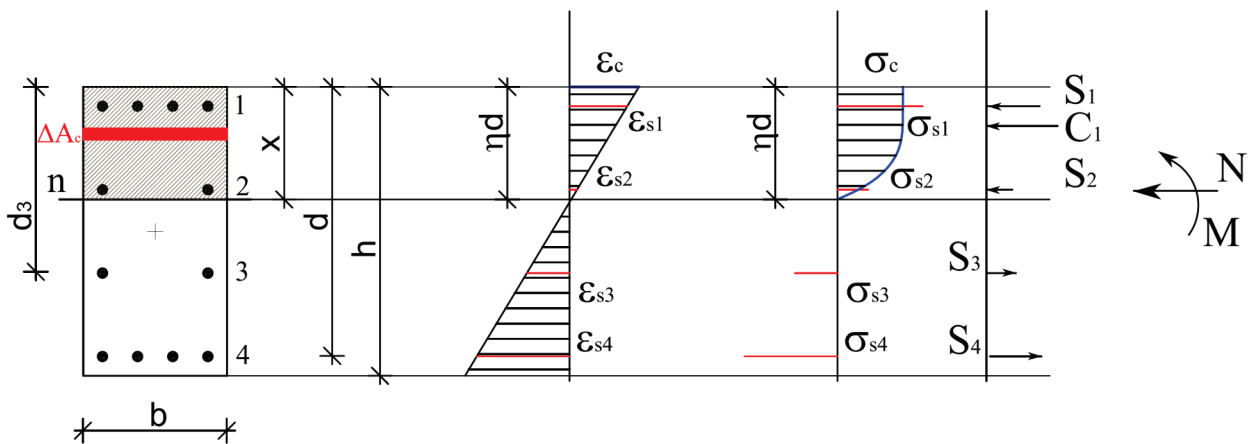


**Curva BILATERA ELASTO-PLASTICA**

Rappresentazione molto grossolana, non riesce a cogliere né la variazione di rigidezza dopo la prima fessurazione, né l'incremento di resistenza dopo la plasticizzazione ( $M_u - M_y = 0$ )

7.3.1. Costruzione del diagramma  $M-\chi-N$

Considero una generica sezione rettangolare in c.a.



La costruzione del diagramma avviene per punti, corrispondenti alle coppie  $(M,\chi)$  calcolate in corrispondenza di un prefissato vale costante di sforzo normale  $N_{sd}$

La procedura iterativa per il calcolo di ciascuna coppia di punti prevede 3 passi operativi:

**Passo 1:**

- si assume un valore iniziale di curvatura  $1/r$
- si assume un valore per la deformazione media  $\varepsilon_m$  in corrispondenza della fibra baricentrica, rispetto alla quale si valutano i momenti
- si divide la sezione in strisce orizzontali e si determinano per ciascuna striscia le  $\varepsilon$  e le  $\sigma$  per il calcestruzzo e per le barre d'armatura

**Passo 2:**

Si determina la risultante delle azioni assiali interne  $N_{int}$  e del momento  $M_{int}$ :

$$N_{int} = \sum \sigma_c \cdot \Delta A_c + \sum \sigma_s A_s$$

$$M_{int} = \sum \sigma_c \cdot z \cdot \Delta A_c + \sum \sigma_s \cdot z \cdot A_s$$

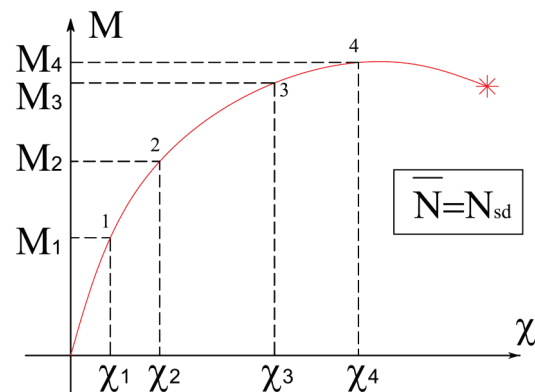
**Passo 3:**

Si verifica che lo sforzo normale interno sia uguale a quello esterno sollecitante, cioè sia soddisfatto l'equilibrio  $N_{sd} = N_{int}$ .

In caso positivo, significa che è stato determinato un valore di curvatura  $\chi$  e di  $\varepsilon_m$  tale da avere una situazione equilibrata e perciò possiamo assumere valido il  $M_{int}$  trovato. La coppia  $M_{int}$ - $\chi$  rappresenta un punto del diagramma momento-curvatura.

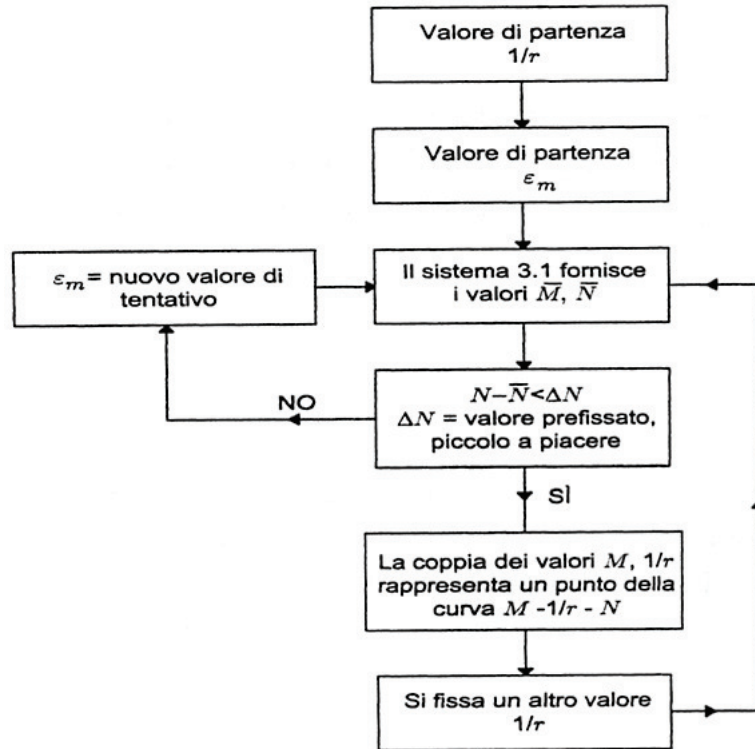
In caso negativo, bisogna assumere un nuovo valore della deformazione media  $\varepsilon_m$  conservando la curvatura tale che gli sforzi normali siano in equilibrio, ripetendo l'operazione finché non risulta  $N_{int} = N_{est}$

Determinata la coppia  $M$ - $\chi$  si ripete l'operazione ciclica fissando una nuova curvatura  $\chi = 1/R$  per determinare altre coppie di punti, fino a descrivere un diagramma completo della curva, compresa la crisi della sezione.



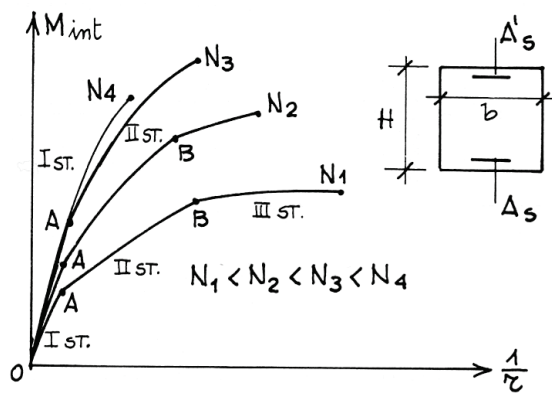
**N.B.:** Il diagramma  $M$ - $\chi$  trovato è valido solo per quel determinato valore di  $N_{sd}$  considerato.

L'operazione può essere rappresentata con il seguente schema a blocchi:



La presenza di uno sforzo normale N agente sulla sezione comporta una modifica sostanziale del diagramma  $M-\chi$ , sia in termini di resistenza, sia di duttilità.

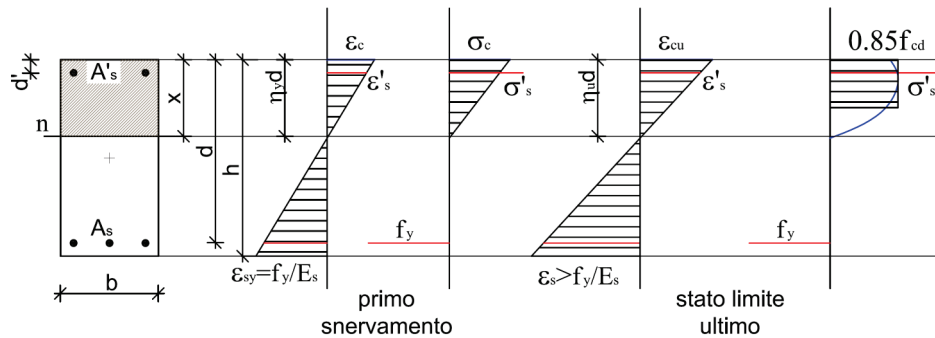
Soffermandoci sull'aspetto della resistenza si osserva un beneficio dovuto all'aumento di N fino a valori prossimi alla rottura bilanciata  $N_b$ ; da questo valore in poi, si ha nuovamente un degrado delle prestazioni.



Per quanto riguarda la duttilità è evidente che la presenza di azione assiale diminuisce notevolmente la capacità di sviluppare curvature in campo plastico cioè impedisce lo sviluppo di ampie rotazioni plastiche

7.3.2. Calcolo della duttilità di una sezione in c.a.

Consideriamo una sezione rettangolare in c.a. e valutiamo la curvatura prima allo snervamento (comportamento elastico lineare) e poi allo stato limite ultimo in assenza di sforzo normale.



Primo Snervamento:

$$\eta_y = \sqrt{\left[ (\rho + \rho')^2 n^2 + 2(\rho + \rho' \delta') n \right] - (\rho + \rho')} n$$

asse neutro elastico in forma adimensionale, con n coefficiente di omogeneizzazione

$$\rho \alpha = \frac{A_s \sigma_s (= f_y)}{b d f_c}$$

allo snervamento dell'acciaio, la  $\sigma_s$  è pari a  $f_y$

$$M_y = A_s f_y \cdot z$$

momento di primo snervamento  
z è noto a partire dall'asse neutro  $\eta_y$

$$\chi_y = \frac{\epsilon_s}{d(1-\eta_y)} = \frac{f_y/E_s}{d(1-\eta_y)}$$

curvatura al limite elastico

Allo Stato Limite Ultimo:

$$\eta_u = \frac{\rho \alpha_d - \rho' \alpha'_d}{\beta}$$

asse neutro "ultimo" in forma adimensionale con  $\beta = 0.8$  altezza stress block

$$M_u = \beta b x_u 0.85 f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \frac{\beta}{2} x \right) + A'_s \sigma'_s \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s \sigma_s \left( d - \frac{h}{2} \right)$$

momento allo SLU

$$\chi_u = \frac{\epsilon_u}{\eta_u d}$$

Curvatura ultima

Duttilità sezione c.a.:

$$\mu = \frac{\chi_u}{\chi_y} = \frac{\epsilon_{cu}}{f_y/E_s} \cdot \frac{1-\eta_y}{\eta_u}$$

Quindi la duttilità **aumenta** se:

- aumenta la deformazione ultima del calcestruzzo
- aumenta la resistenza del calcestruzzo compresso (eventualmente effetto confinamento)
- aumenta l'area di acciaio compresso

Quindi la duttilità **diminuisce** se:

- aumenta l'area di acciaio teso
- aumenta la tensione di snervamento dell'acciaio teso

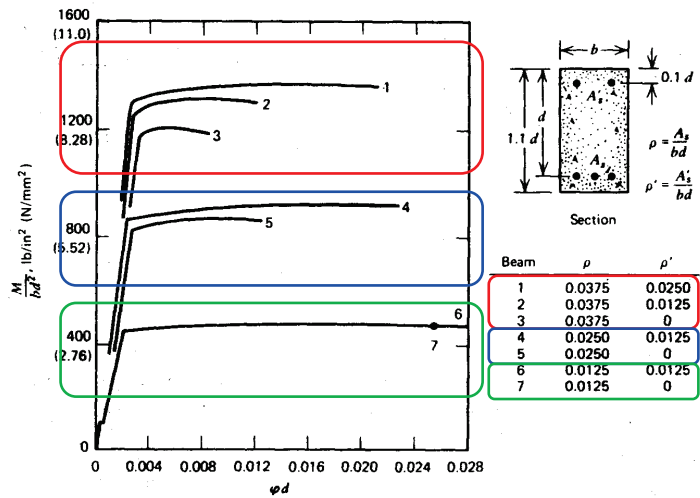
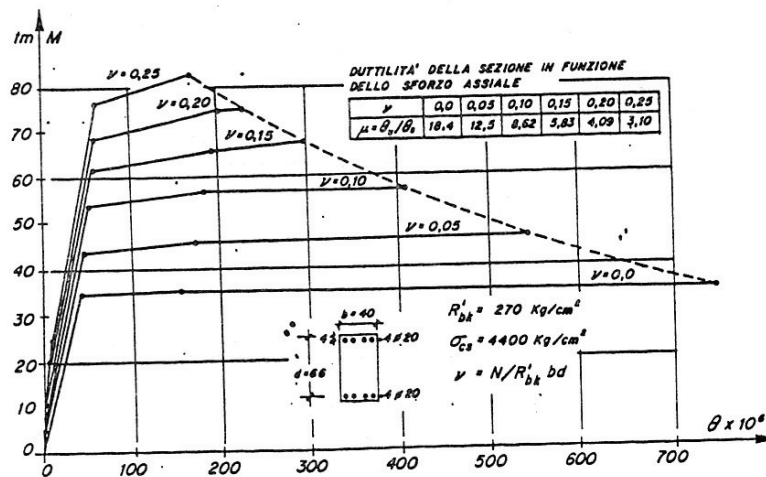


Fig. 6.6. Theoretical moment-curvature relationships.

**OSS:**

In conclusione per ottenere sezioni duttili in c.a. si devono progettare sezioni con “poco acciaio” con limite di snervamento non troppo elevato e calcestruzzo molto resistente, sfruttando eventualmente l'effetto confinamento

Consideriamo un sezione rettangolare in c.a. **soggetta a sforzo normale N**: la figura seguente illustra chiaramente l'effetto di N sulla duttilità.

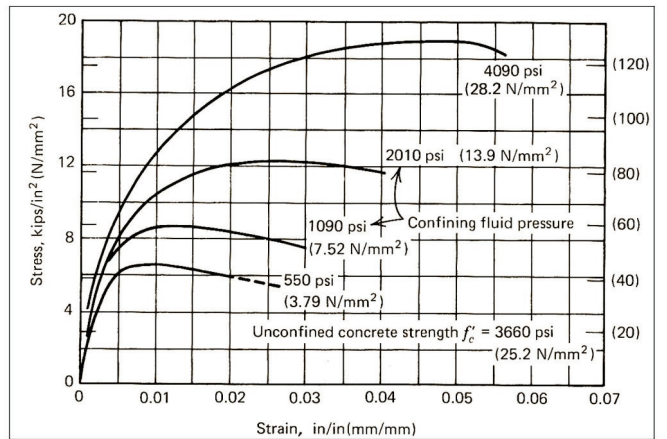
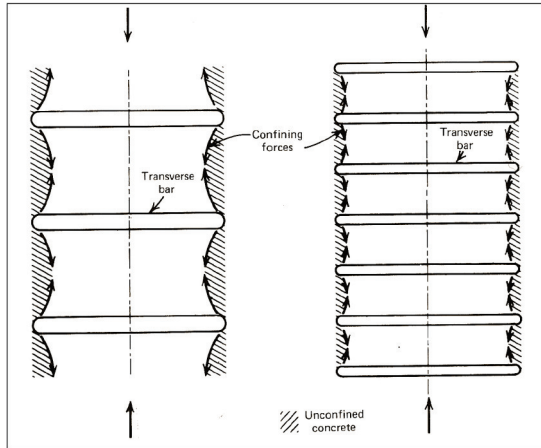


È evidente come la presenza di **N sia negativa**, infatti già per valori modesti del rapporto  $N/N_u$  la duttilità della sezione si riduce notevolmente rispetto al caso di flessione semplice ( $N=0$ ); per valori di  $N > 0.4N_u$  la duttilità diventa addirittura nulla in quanto il collasso della sezione è causato dallo schiacciamento del calcestruzzo mentre l'acciaio è ben lontano dallo snervamento.

**L'aumento dello sforzo normale diminuisce la duttilità della sezione**

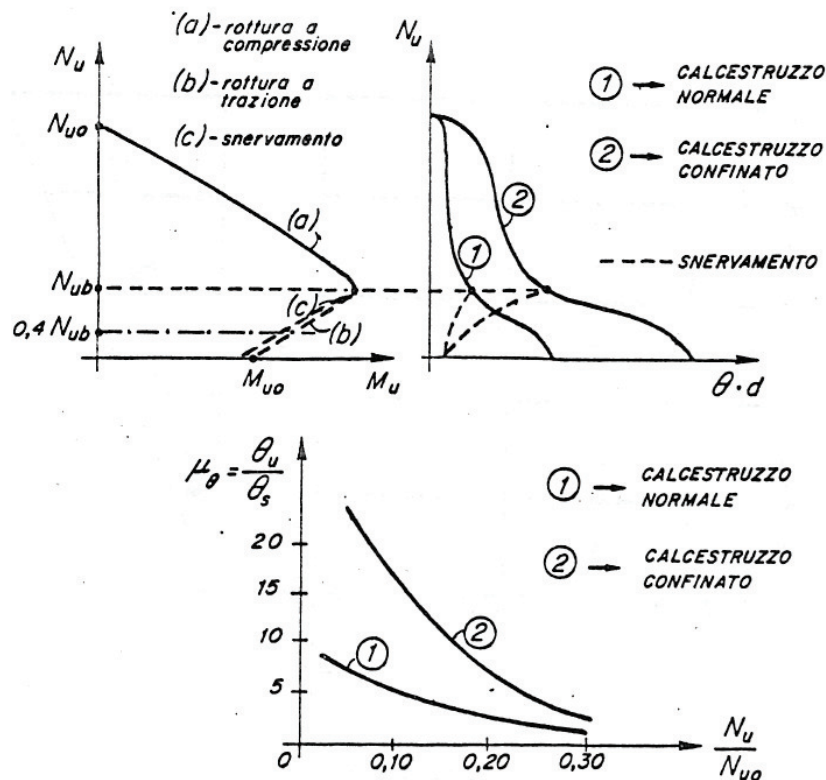
Un aspetto positivo che incrementa la duttilità è certamente l'effetto dovuto al confinamento del calcestruzzo:

La presenza di uno stato bi/tri-assiale di compressione aumenta la resistenza del cls



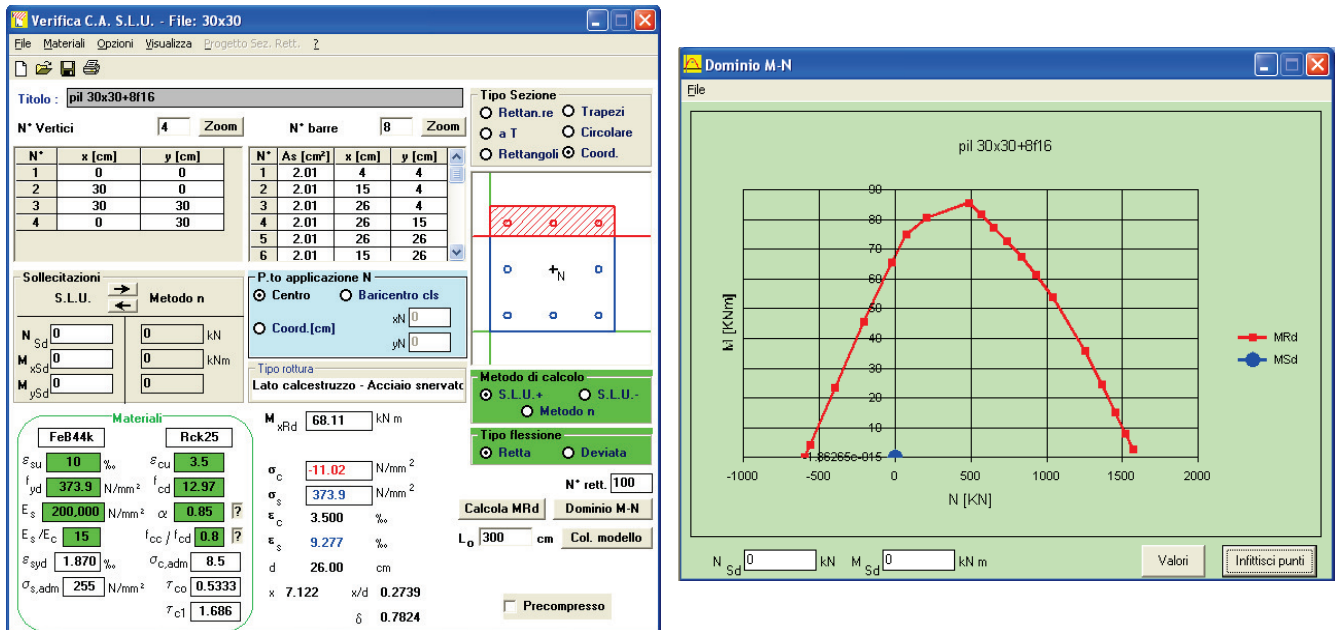
L'effetto confinamento si ottiene "cerchiando" la sezione in calcestruzzo con staffe disposte a passo molto ravvicinato (come nei pilastri cerchiati)

Il confinamento aumenta le capacità duttili

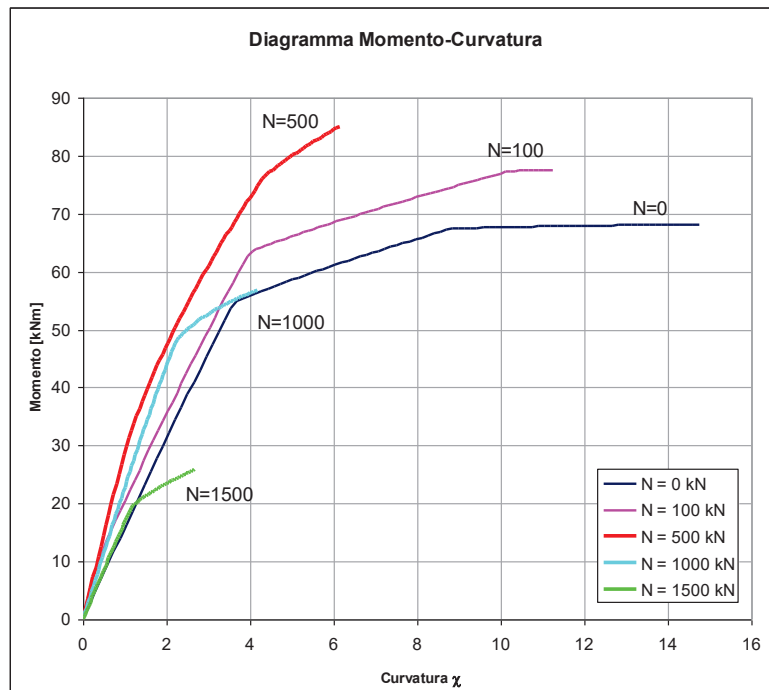


7.3.3. Esempio

Consideriamo un pilastro di sezione quadrata 30x30 con 8φ16:



La figura seguente rappresenta diversi diagrammi Momento-Curvatura al variare del carico assiale  $N_{sd}$  presente:

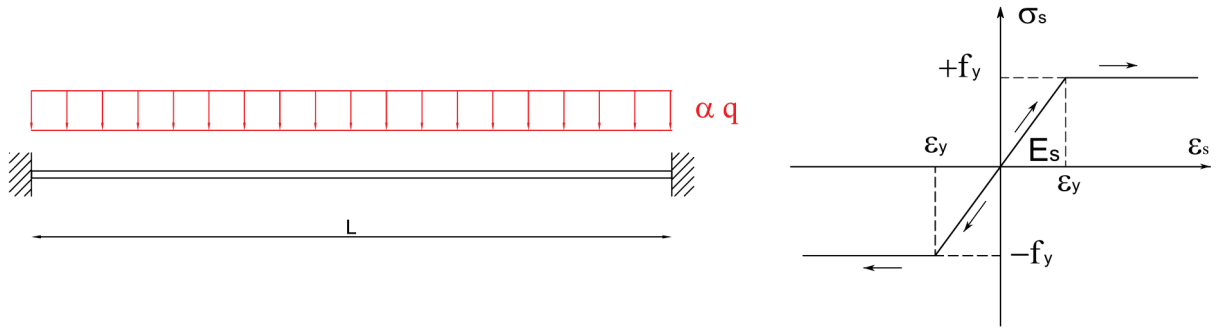


**7.4. Analisi passo-passo**

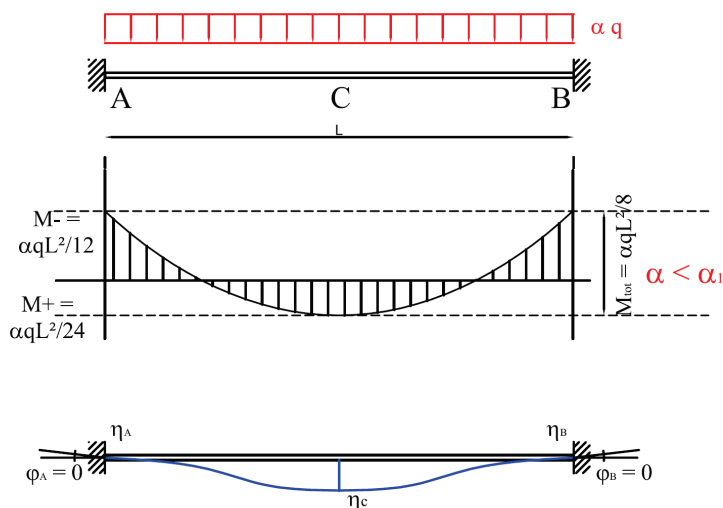
Consideriamo una trave incastrata-incastrata ed incrementiamo il carico distribuito fino a giungere al collasso della struttura.

Supponiamo per semplicità che la struttura sia simmetrica, sezione simmetrica e materiale duttile a comportamento simmetrico (es: acciaio).

Chiamiamo  $\alpha$  il moltiplicatore del carico distribuito  $q$  ( $\alpha \geq 1$ )



**7.4.1. Passo 1**



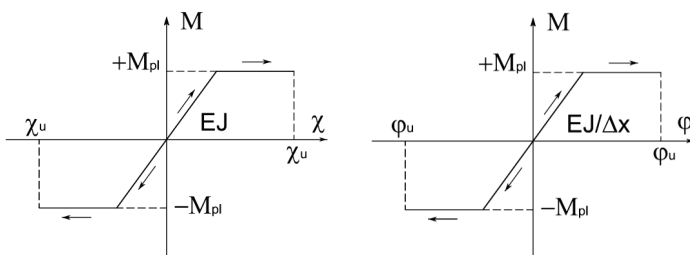
$$M_A = M_B = \alpha \frac{qL^2}{12}$$

$$M_C = \alpha \frac{qL^2}{24}$$

$$M_A + M_C = \alpha \frac{qL^2}{8}$$

$$\eta_C = \frac{1}{384} \frac{\alpha q L^4}{EJ}$$

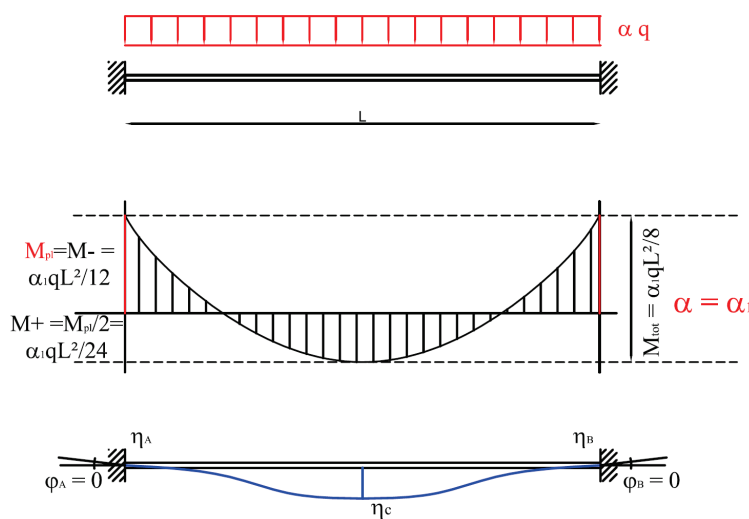
$$\phi_A = \phi_B = 0$$



in realtà:  $\phi_A = \phi_B \cong 0$

7.4.2. Passo 2

Quando il momento negativo massimo raggiunge il valore di  $M_{pl}$ , la struttura perviene il limite elastico e si raggiunge la plasticizzazione delle sezioni d'incastro; il moltiplicatore di carico  $\alpha$  viene chiamato  $\alpha_1$ , **moltiplicatore al limite elastico**.



$$M_A = M_B = \alpha_1 \frac{qL^2}{12} = M_{pl}$$

$$M_C = \alpha_1 \frac{qL^2}{24} = \frac{M_{pl}}{2}$$

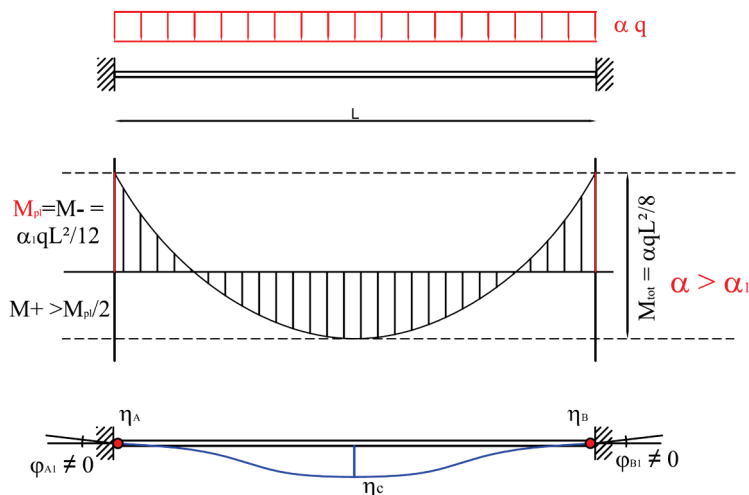
$$M_A + M_C = \alpha_1 \frac{qL^2}{8}$$

$$\eta_C = \frac{1}{384} \frac{\alpha_1 qL^4}{EJ}$$

$$\varphi_A = \varphi_B \cong 0$$

7.4.3. Passo 3

Se ora si aumenta il carico per  $\alpha > \alpha_1$ , la sezione di incastro non può più riprendere momento e inizia a ruotare - vedi legame costitutivo: si è formata una cerniera plastica; da questo momento in poi, per ogni ulteriore incremento di carico la trave si comporta come una trave in semplice appoggio.



$$M_A = M_B = M_{pl}$$

$$M_C = \frac{M_{pl}}{2} + (\alpha - \alpha_1) \frac{qL^2}{8} =$$

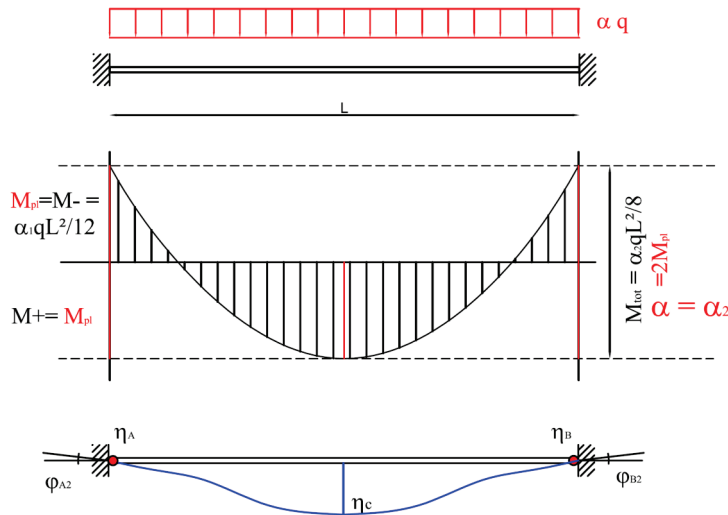
$$M_A + M_C = \alpha \frac{qL^2}{8}$$

$$\eta_C = \frac{1}{384} \frac{\alpha_1 qL^4}{EJ} + \frac{5}{384} \frac{(\alpha - \alpha_1) qL^4}{EJ}$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{(\alpha - \alpha_1) qL^3}{EJ}$$

7.4.4. Passo 4

Si può incrementare il carico fino a quando non si ha la terza cerniera plastica, con formazione di un meccanismo di collasso (3 cerniere allineate); il moltiplicatore trovato  $\alpha_2$  viene definito **moltiplicatore di collasso**.



$$M_A = M_B = M_{pl}$$

$$M_C = M_{pl} = \frac{M_{pl}}{2} + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{qL^2}{8} =$$

$$M_A + M_C = \alpha_2 \frac{qL^2}{8} = 2M_{pl}$$

$$\eta_c = \frac{1}{384} \frac{\alpha_1 qL^4}{EJ} + \frac{5}{384} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) qL^4}{EJ}$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) qL^3}{EJ} = \frac{M_{pl}}{6EJ}$$

Inoltre:

$$\alpha_1 \frac{qL^2}{12} = M_{pl}$$

$$\alpha_1 = 12 \frac{M_{pl}}{qL^2}$$

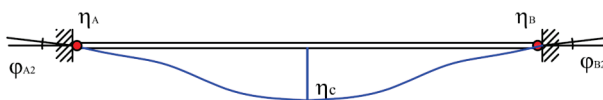
$$\alpha_2 \frac{qL^2}{8} = 2M_{pl}$$

$$\alpha_2 = 16 \frac{M_{pl}}{qL^2}$$

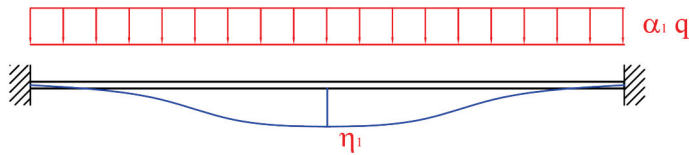
$$\alpha_2 = \frac{4}{3} \alpha_1 = 1.33 \alpha_1$$

**In questo caso il momento di collasso è del 33% superiore al momento di prima plasticizzazione.**

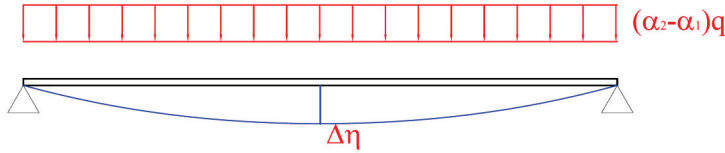
Valutiamo la freccia in mezzeria:



$$\eta_2 = \eta_1 + \Delta\eta$$

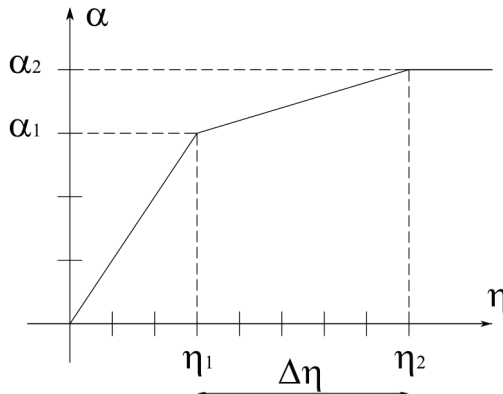


$$\eta_1 = \frac{1}{384} \frac{\alpha_1 q L^4}{EJ}$$



$$\Delta \eta = \frac{5}{384} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) q L^4}{EJ}$$

$$= \frac{5}{384} \frac{(0.33 \alpha_1) q L^4}{EJ}$$



$$\eta_2 = \left( \frac{1}{384} + \frac{5 \times 0.33}{384} \right) \frac{\alpha_1 q L^4}{EJ}$$

Superato  $\eta_2$  non si ha più rigidezza; si accumulano solo deformazioni

L'analisi al passo ha permesso di determinare il comportamento non-lineare della struttura. Per far ciò devono essere rispettate le **seguenti ipotesi necessarie**:

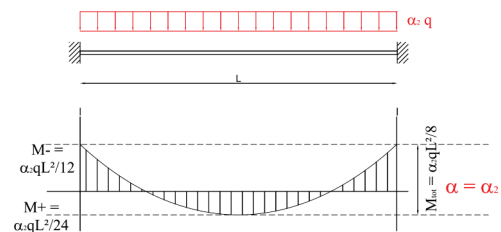
- ⇒

1. **STRUTTURA IPERSTATICA;**
  2. **COMPORAMENTO DUTTILE  $\mu > 1$**

⇐

Concludendo si possono seguire 2 diversi modi di operare:

1° MODO: progetto la trave per resistere alle sollecitazioni calcolate elasticamente con un carico pari a  $\alpha_2 q$  (carico di collasso), cioè  $\alpha_1 = \alpha_2$  - procedura seguita fin'ora. In questo caso opero elasticamente fino a collasso



2° MODO: se sono verificate le ipotesi necessarie 1 e 2, posso sfruttare le riserve di resistenza plastiche della struttura, ottimizzando la progettazione: riduco l'armatura a momento negativo, aumentando quella a momento positivo (per evitare la formazione della 3° cerniera plastica che mi porta al collasso). In questo caso opero una redistribuzione delle sollecitazioni.

## 7.5. Metodi di Analisi

Le nuove **Norme Tecniche sulle Costruzioni – NTC2018** al capitolo 4.1 – costruzioni in calcestruzzo – prevedono che, per la valutazione degli effetti delle azioni, si possono adottare i seguenti metodi:

- analisi elastica-lineare
  - ✓ senza redistribuzione dei momenti
  - ✓ con redistribuzione dei momenti
- analisi plastica
- analisi non lineare (analisi passo-passo)

Inoltre, le **Analisi Globali** hanno lo scopo di stabilire la distribuzione delle forze interne, delle tensioni, delle deformazioni e degli spostamenti nell'intera struttura o in una parte di essa.

**Analisi locali** possono essere necessarie nelle *zone singolari* quali quelle poste:

- ✓ in prossimità degli appoggi;
- ✓ in corrispondenza di carichi concentrati;
- ✓ alle intersezioni travi-colonne;
- ✓ nelle zone di ancoraggio;
- ✓ in corrispondenza di variazioni della sezione trasversale.

### 7.5.1. Analisi elastica-lineare (senza redistribuzione)

Si esegue il **calcolo elastico-lineare della struttura considerando le sezioni non fessurate**.

A partire da queste sollecitazioni si calcolano le sezioni secondo il Metodo Semiprobabilistico agli Stati Limite.

In tal caso, il diagramma dei momento flettenti di calcolo si dice *staticamente ammissibile*, i carichi sono staticamente ammissibili.

Una distribuzione dei momenti si dice "*staticamente ammissibile*" se soddisfa alle seguenti condizioni:

- 1) è in equilibrio con i carichi esterni;
- 2) è conforme ai limiti di resistenza flessionale in ogni punto della struttura.

Nel caso riuscissimo a dosare accuratamente le resistenze (armature della trave) in modo da arrivare in tutte le sezioni contemporaneamente al raggiungimento dello SLU, il calcolo elastico riuscirebbe a rappresentare perfettamente la situazione reale; **nella realtà invece ci saranno sezioni più resistenti di altre**, relativamente alle corrispondenti sollecitazioni, quindi bisogna fare delle valutazioni sulla bontà dei risultati ottenuti.

Vantaggi:

- redistribuzione molto limitata e quindi ridotta richiesta di rotazioni;
- in condizioni di esercizio (carichi di servizio) le sollecitazioni sono contenute con conseguente modesta fessurazione del calcestruzzo;
- non sono necessarie verifiche specifiche della duttilità disponibile;
- semplicità del metodo di calcolo.

7.5.2. Analisi elastica-lineare con redistribuzione limitata

Per le sole verifiche agli stati limite ultimi, i risultati dell'analisi elastica possono essere modificati con una redistribuzione dei momenti, nel rispetto dell'equilibrio e delle capacità di rotazione plastica delle sezioni dove si localizza la redistribuzione (perciò limitata).

L'analisi consiste nel considerare un moltiplicatore  $\alpha$  intermedio fra  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ :  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

In questo modo si prescrive minor armatura a momento negativo ( $M_{pl}$  inferiore) e si aumenta quella a momento positivo ( $\frac{1}{2} M_{pl} < M < M_{pl}$ ).

N.B.

Tanto è maggiore la riduzione di momento agli incastri e conseguente aumento in campata, tanto maggiore sarà la rotazione della cerniera e quindi la richiesta di duttilità.

Più in particolare:

- si esegue un calcolo elastico lineare della struttura, determinando il diagramma dei momenti;
- si riducono in “*maniera arbitraria*” (con esperienza) le sollecitazioni in certe zone (solitamente a momento negativo) con il corrispondente aumento in altre (solitamente a momento positivo) ripristinando l'equilibrio;
- si esegue il progetto delle sezioni agli SLU in base al nuovo diagramma dei momenti (ridistribuito).

Vantaggi:

- con un'appropriata redistribuzione posso operare opportuni risparmi di armature, in modo da evitare congestioni, ad es. agli appoggi a momento negativo;
- semplicità dei metodi di calcolo a partire dal diagramma dei momenti elastici di base.

Svantaggi:

- richieste di duttilità non esplicitate (opero una redistribuzione forfettaria nel rispetto delle prescrizioni normative);
- necessità di controlli in condizione di esercizio: verifica dello stato fessurativo.

Si definisce un coefficiente  $\delta$  quale rapporto fra il momento sollecitante di progetto (dopo la redistribuzione) ed il momento elastico da analisi (prima della redistribuzione):

$$\delta = \frac{M_{sd}}{M_e}$$

“In particolare la redistribuzione:

- non è ammessa per i pilastri e per i nodi dei telai;
- è consentita per le travi continue e le solette, a condizione che:
  - le sollecitazioni di flessione siano prevalenti;
  - i rapporti tra le luci di campate contigue siano compresi nell’intervallo 0.5-2.0.

Per le travi e le solette che soddisfano le condizioni dette la redistribuzione dei momenti flettenti può effettuarsi senza esplicite verifiche in merito alla duttilità delle membrature, purché il rapporto  $\delta$  risulti:

$$1 < \delta < 0.70$$

I valori di  $\delta$  si ricavano dalle espressioni:

$$\delta > 0.44 + 1.25 \left( .6 + \frac{0.0014}{\varepsilon_{cu}} \right) \frac{x}{d} \quad \text{per } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\delta > 0.54 + 1.25 \left( .6 + \frac{0.0014}{\varepsilon_{cu}} \right) \frac{x}{d} \quad \text{per } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

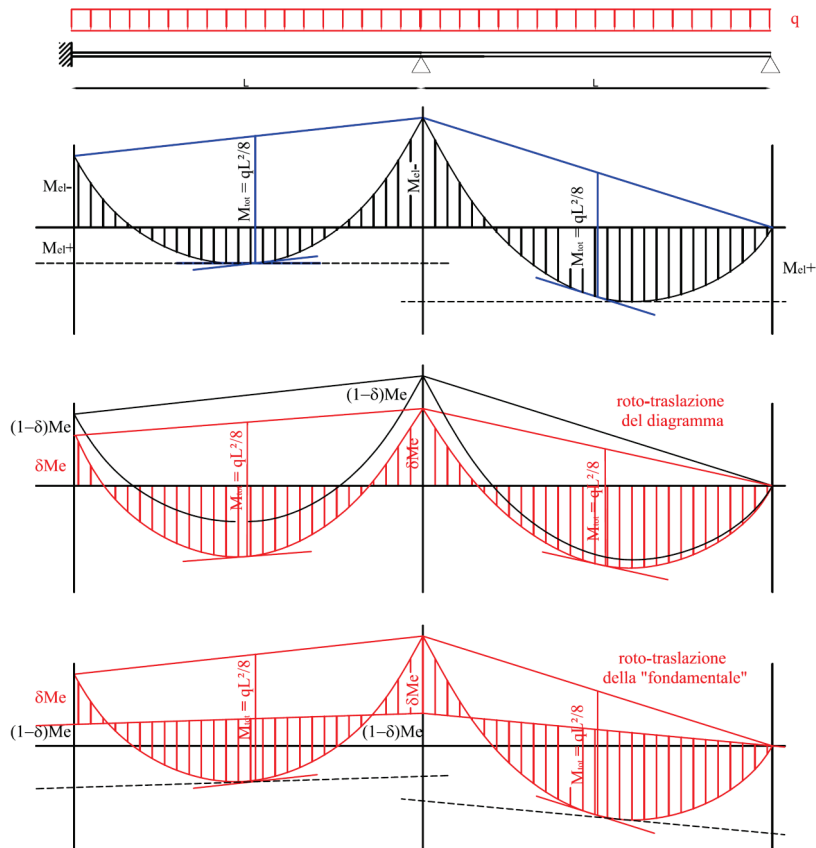
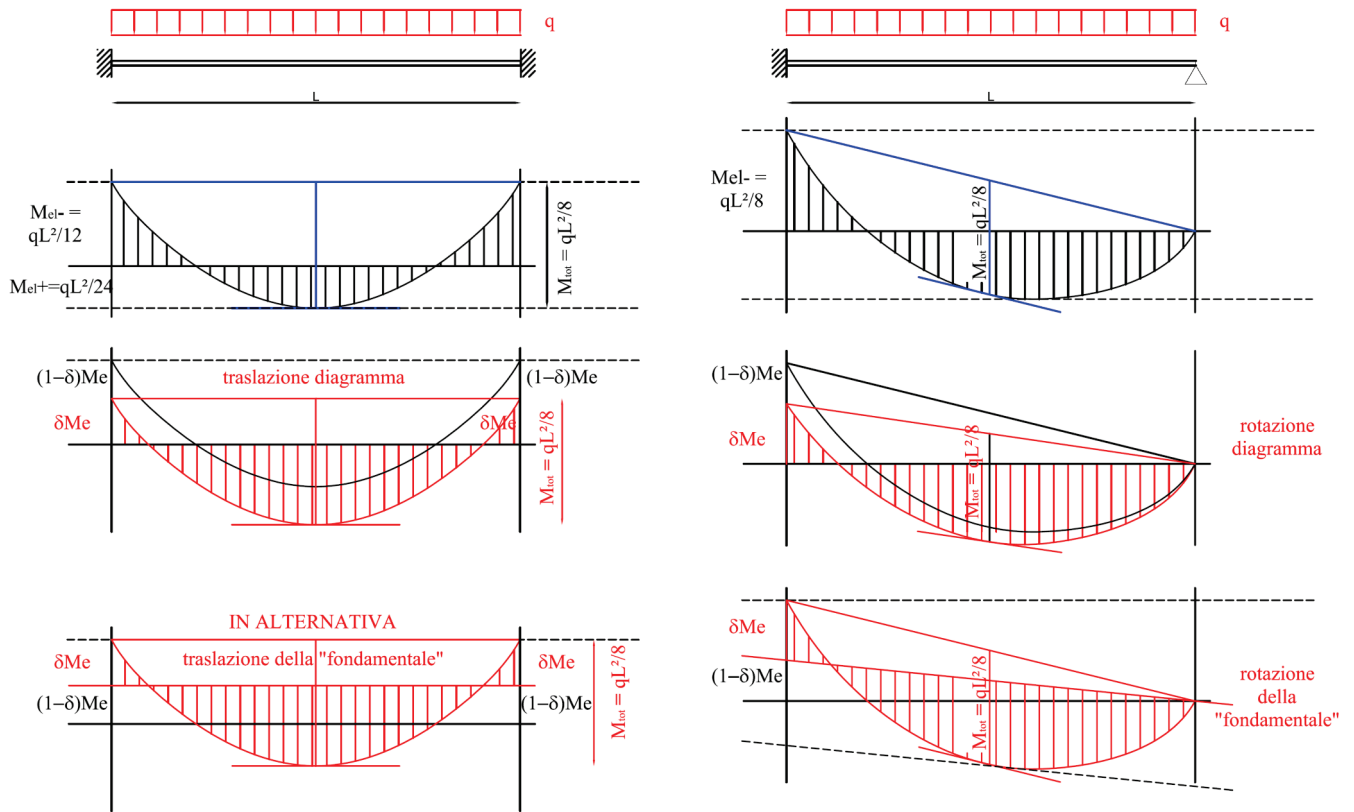
dove:

- $x$  è l’altezza della zona compressa
- $\varepsilon_{cu}$  è pari a 0.35% per  $f_{ck} < 50$  MPa.

Di solito si assume  $\delta$  pari a 85% e poi si esegue la verifica a posteriori della duttilità.

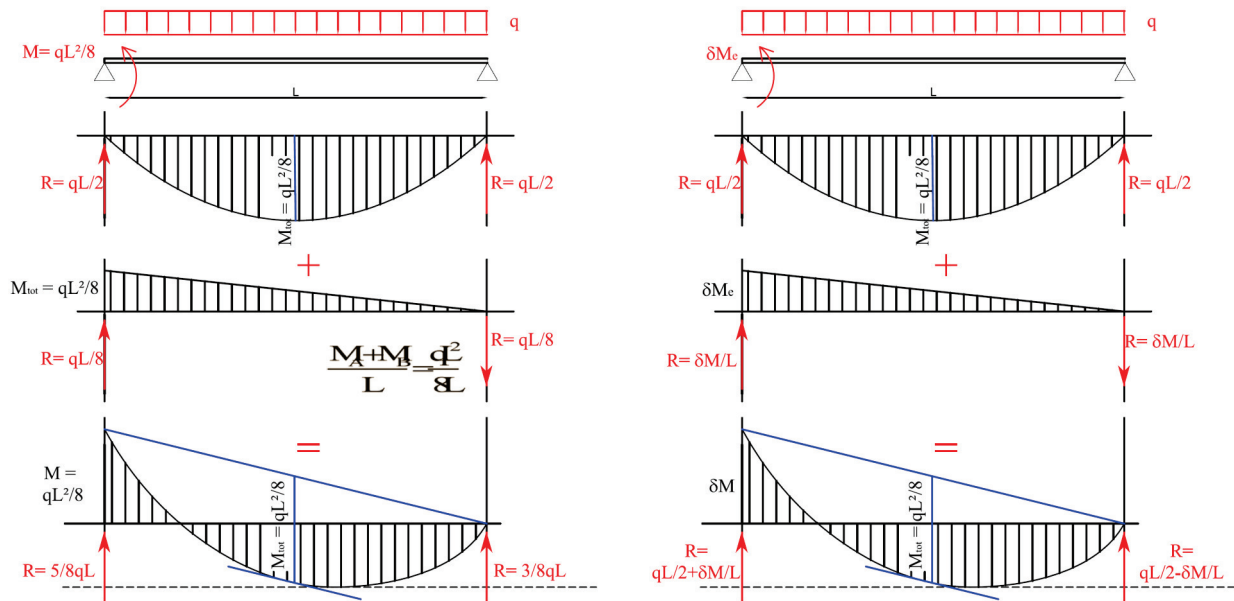
Vediamo alcuni esempi classici:

- 1) trave incastrata-incastrata
- 2) trave incastro-appoggio
- 3) trave continua su 2 campate con primo estremo incastrato



N.B.: Se opero la redistribuzione del diagramma dei momenti, devo ricalcolare il diagramma del taglio !!!

La presenza di un momento diverso agli appoggi, implica una distribuzione diversa dei tagli rispetto alla condizione di partenza (elastica).



Riassumendo, si può utilizzare questo metodo se:

- 1) il rapporto fra le luci è compreso fra 0.5 e 2 (una il doppio dell'altra)
- 2) lo schema statico è IPERSTATICO
- 3) i momenti flettenti derivano solamente da carichi verticali, e non da carichi laterali
- 4) DUTTILITA'

### 7.5.3. Analisi plastica

L'analisi plastica può essere usata per valutare gli effetti di azioni statiche e per i soli stati limite ultimi.

Al materiale si può attribuire un diagramma tensioni-deformazioni rigido-plastico verificando che la duttilità delle sezioni dove si localizzano le plasticizzazioni sia sufficiente a garantire la formazione del meccanismo previsto.

Vantaggi:

- Ampia possibilità di scelta del diagramma dei momenti con conseguente vantaggio nella disposizione delle armature e possibili economie.

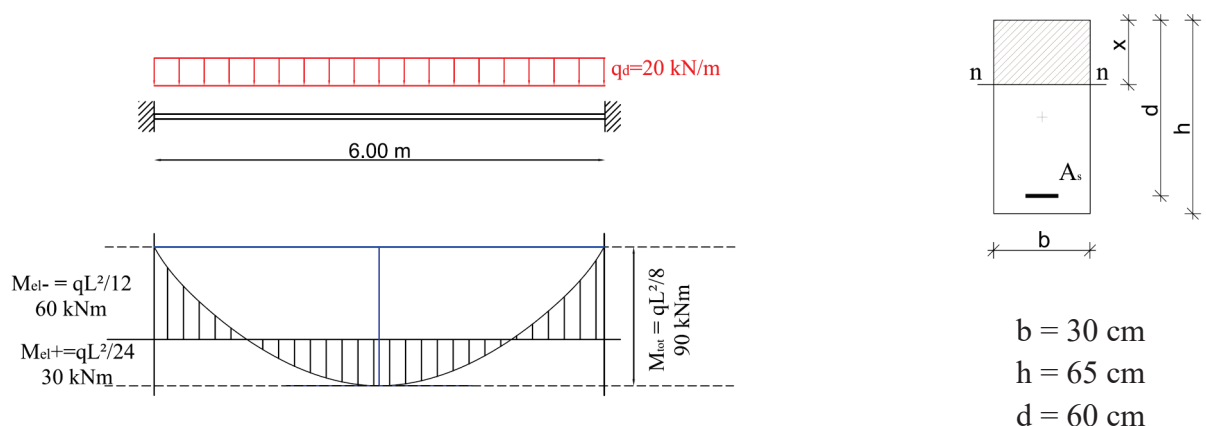
Svantaggi:

- necessità di un accurato controllo delle condizioni di servizio: fessurazione e deformabilità;
- complessità del metodo;
- controllo della capacità di ottenere le rotazioni delle cerniere plastiche per ottenere la redistribuzione ricercata.

7.5.4. Analisi non lineare

È un metodo rigoroso in cui si attribuisce al materiale un diagramma tensioni-deformazioni che ne rappresenti adeguatamente il comportamento reale, verificando che le sezioni dove si localizzano le plasticizzazioni siano in grado di sopportare allo stato limite ultimo tutte le deformazioni non elastiche derivanti dall'analisi, tenendo in appropriata considerazione le incertezze.

I metodi rigorosi vengono eseguiti necessariamente con i calcolatori e sono riservati a *casì di particolare interesse e non per le applicazioni usuali*.

7.5.5. Esempio

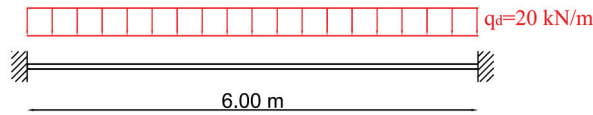
Nell'ipotesi di lavorare in semplice armature, si ha:

$$A_s^- = \frac{M_{sdu}^-}{0.9 \cdot f_{sd} \cdot d} = \frac{60 \times 10^6}{0.9 \cdot 374 \cdot 600} = 297 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow \quad 2\phi 14 = 308 \text{ mm}^2$$

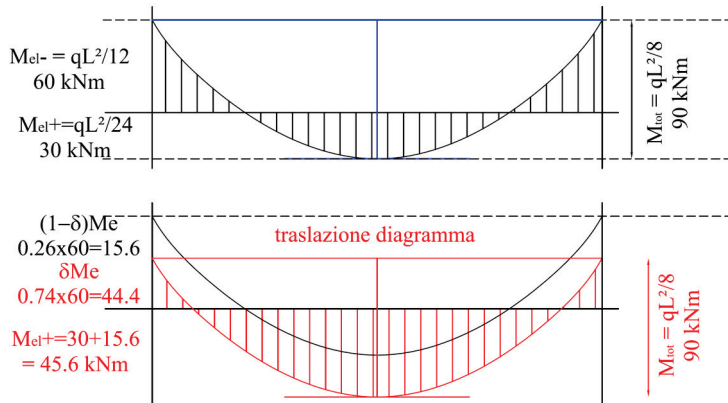
$$A_s^+ = \frac{M_{sdu}^+}{0.9 \cdot f_{sd} \cdot d} = \frac{30 \times 10^6}{0.9 \cdot 374 \cdot 600} = 148.5 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow \quad 2\phi 12 = 226 \text{ mm}^2$$

Ipotizziamo di voler lavorare anche a momento negativo con 2φ12 (ipotesi puramente didattica); a tal scopo dovremmo ridurre il momento della seguente quantità:

$$\frac{A(2\phi 12)}{A(2\phi 14)} = \left(\frac{12}{14}\right)^2 = 0.74$$



Quindi operiamo una ridistribuzione pari a  $\delta=0.74$ , in accordo con la normativa  $\delta>0.70$ .



Si ottiene:

$$\delta = 0.74$$

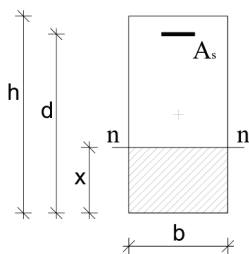
$$M_{sdu}^- = 0.74 \times 60 = 44.4 \text{ kNm}$$

$$M_{sdu}^+ = 30 + 0.26 \times 60 = 45.6 \text{ kNm}$$

$$A_s^- = \frac{M_{sdu}^-}{0.9 \cdot f_{sd} \cdot d} = \frac{44.4 \times 10^6}{0.9 \cdot 374 \cdot 600} = 220.8 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow 2\phi 12 = 226 \text{ mm}^2$$

$$A_s^+ = \frac{M_{sdu}^+}{0.9 \cdot f_{sd} \cdot d} = \frac{45.6 \times 10^6}{0.9 \cdot 374 \cdot 600} = 225.8 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow 2\phi 12 = 226 \text{ mm}^2$$

Verifichiamo se la sezione a momento negativo può permettersi tale redistribuzione:



$$A_s^- = 2\phi 12 = 226 \text{ mm}^2 \quad f_{cd} = \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83 \times 35}{1.5} = 19.37$$

$$\alpha_d = \frac{f_{sd}}{0.85 f_{cd}} = \frac{374}{0.85 \times 19.37} = 22.71$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{226}{300 \times 600} = 1.25 \times 10^{-3} = 0.13\%$$

$$0.8\eta - \rho\alpha_d = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{x}{d} = \frac{\rho\alpha_d}{0.8} = \frac{1.25 \times 10^{-3} \times 22.71}{0.8} = 0.0356$$

$$\delta > 0.44 + 1.25 \left( .6 + \frac{0.0014}{\epsilon_{cu}} \right) \frac{x}{d} = 0.48 \quad \text{per } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

L'ipotesi di  $\delta=0.74$  è verificata, significa che la sezione è così duttile che mi permette una tale ridistribuzione.

### **Riferimenti bibliografici essenziali**

- “Progetto agli stati limite delle strutture in c.a. – parte prima e seconda” – A.Migliacci e F.Mola. – Masson Editore
- “Atti del corso di aggiornamento in tema di ingegneria sismica” Udine 1981
- “Reinforced Concrete Structures” – R.Park e T.Paulay – Wiley e Sons, 1975
- D.M. 14/01/2008 “Norme tecniche per le costruzioni”
- D.M. 17/01/2018 “Norme tecniche per le costruzioni”
- Circolare 21 gennaio 2019 - Istruzioni per l’applicazione dell’Aggiornamento delle “Norme tecniche per le costruzioni” di cui al D.M. 17 gennaio 2018