FISICA GENERALE

— Parte 3 —

Statistica

Link moodle: https://moodle2.units.it/course/view.php?id=16681

Codice Teams del corso: gz0wuf4

Programma delle lezioni

Lezione 1: Introduzione al corso, ai concetti generali e all'analisi degli errori; stima delle incertezze

Lezione 2: Errori casuali e sistematici, rappresentazione degli errori, cifre significative, discrepanza

Lezione 3: Errori assoluti e relativi, applicazioni particolari della propagazione degli errori, somma in quadratura

Lezione 4: Propagazione degli errori, funzioni di una o più variabili, formula generale; esempi ed esercizi

Lezione 5: Analisi statistica degli errori casuali; media, deviazione standard; errori sistematici

Lezione 6: Rappresentazione dei dati; istogrammi e distribuzioni, distribuzione limite

Lezione 7: Distribuzione normale o gaussiana (prima parte); livelli di confidenza

Lezione 8: Distribuzione gaussiana (seconda parte) e principio di massima verosimiglianza; rigetto dei dati

Lezione 9: Distribuzione binomiale

Lezione 10: Distribuzione di Poisson

Lezione 11: Metodo dei minimi quadrati; ripasso di eventuali argomenti a richiesta; esercizi

La distribuzione binomiale

Distribuzione: funzione che descrive la proporzione di volte in cui ciascuno dei vari possibili risultati di una misura ripetuta si presenta

Distribuzione limite: distribuzione che si otterrebbe al limite quando il numero di misure N diventa molto grande
<—> **Distribuzione di probabilità:** quale probabilità che una misura presenti uno dei possibili valori

Distribuzione normale: distribuzione limite che descrive risultati di una misura soggetta a più sorgenti di errori piccoli e casuali

Altre distribuzioni: distribuzione binomiale, distribuzione poissoniana

Distribuzione binomiale: teoricamente importante perché consente di ricavare la distribuzione normale

Un esempio per introdurla:

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio 3 dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4).

Qual è la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano ν volte 4, con ν **= 0, 1, 2 o 3?**

Esperimento semplice —> Calcolo la probabilità delle quattro possibili uscite.

Probabilità di ottenere la faccia con il 4: 1/6

Getto tutti e tre i dadi.

La probabilità di ottenere ν**=3**, ovvero tutti i dadi che mostrano la stessa faccia con il 4, è:

P(3 volte 4 in 3 lanci) = $(1/6)^3 \simeq 0.5\%$

perché ogni dado ha probabilità 1/6 di dare 4 e perché i tre dadi rotolano indipendentemente

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio 3 dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4).

Qual è la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano ν volte 4, con ν **= 0, 1, 2 o 3?**

Probabilità di ottenere ν**=2**

P(4, 4, non 4) = $(1/6)^2$ x (5/6)
P(4, non 4, 4) = (1/6) x (5/6) x (1/6)
P(non 4, 4, 4) = (5/6) x $(1/6)^2$

La probabilità totale di ottenere ν**=2** in qualunque ordine è:

P(2 volte 4 in 3 lanci) = 3 x $(1/6)^2$ x (5/6) $\simeq$ 6.9%

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio 3 dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4).

Qual è la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano ν volte 4, con ν **= 0, 1, 2 o 3?**

Probabilità di ottenere ν**=1**

P(4, non 4, non 4) = (1/6) x $(5/6)^2$
P(non 4, 4, non 4) = (5/6) x (1/6) x (5/6)
P(non 4, non 4, 4) = $(5/6)^2$ x (1/6)

La probabilità totale di ottenere ν**=1** in qualunque ordine è:

P(1 volta 4 in 3 lanci) = 3 x (1/6) x $(5/6)^2 \simeq 34.7\%$

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio 3 dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4).

Qual è la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano ν volte 4, con ν **= 0, 1, 2 o 3?**

La probabilità di ottenere ν**=3** è:

P(3 volte 4 in 3 lanci) = $(1/6)^3 \simeq$ 0.5%

La probabilità di ottenere ν**=2** è:

P(2 volte 4 in 3 lanci) = 3 x $(1/6)^3$ x $(5/6) \simeq$ 6.9%

Probabilità di ottenere ν**=1** è:

P(1 volta 4 in 3 lanci) = 3 x (1/6) x $(5/6)^2 \simeq$ 34.7%

Probabilità di ottenere ν**=0** è:

P(non 4, non 4, non 4) = $(5/6)^3 \simeq$ 57.9%

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio 3 dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4).

Qual è la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano ν volte 4, con ν **= 0, 1, 2 o 3?**

La probabilità di ottenere ν**=3** è:

P(3 volte 4 in 3 lanci) = $(1/6)^3 \simeq 0.5\%$

La probabilità di ottenere ν**=2** è:

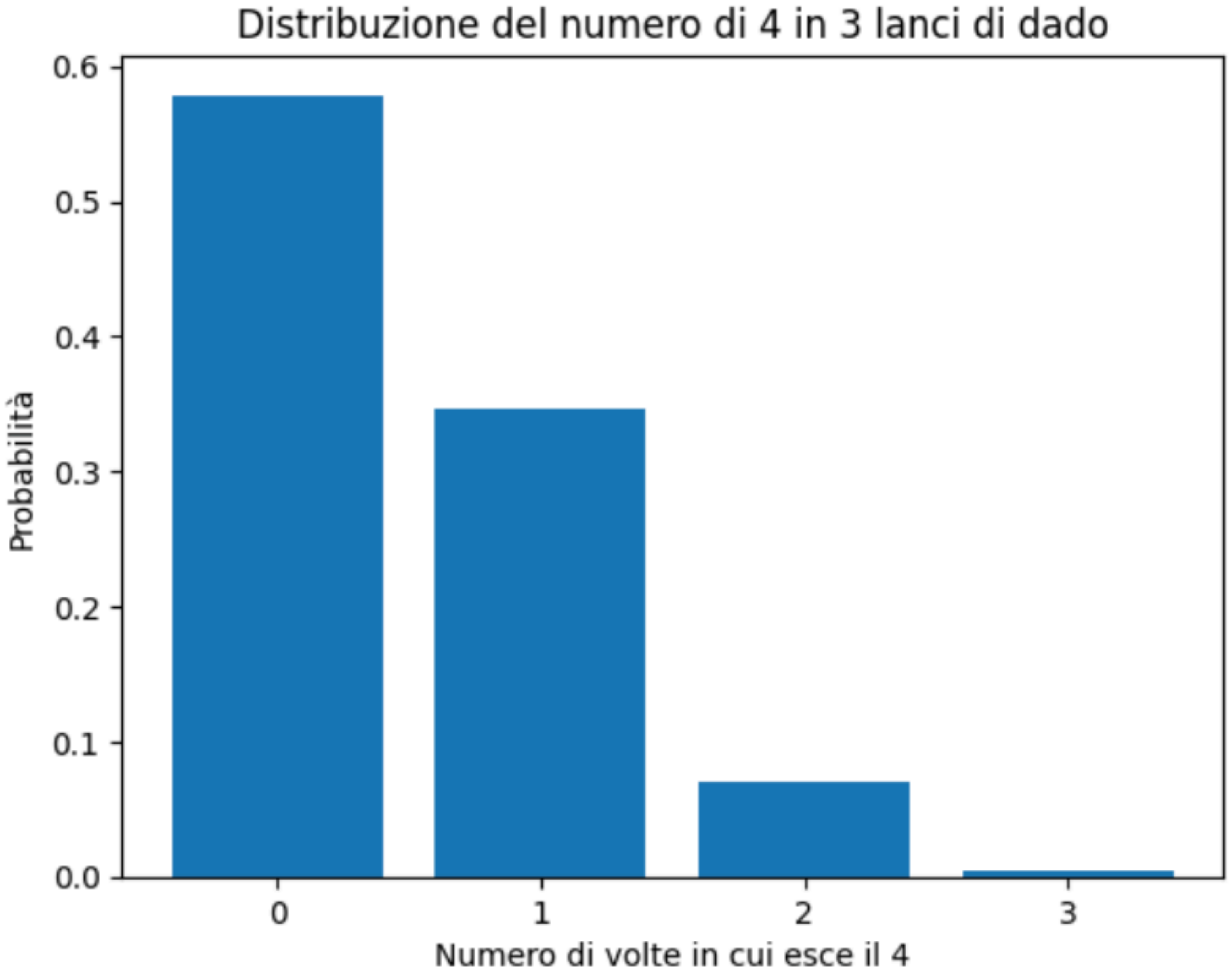
P(2 volte 4 in 3 lanci) = $3 \times (1/6)^3 \times (5/6) \simeq 6.9\%$

Probabilità di ottenere ν**=1** è:

P(1 volta 4 in 3 lanci) = $3 \times (1/6) \times (5/6)^2 \simeq 34.7\%$

Probabilità di ottenere ν**=0** è:

P(non 4, non 4, non 4) = $(5/6)^3 \simeq 57.9\%$

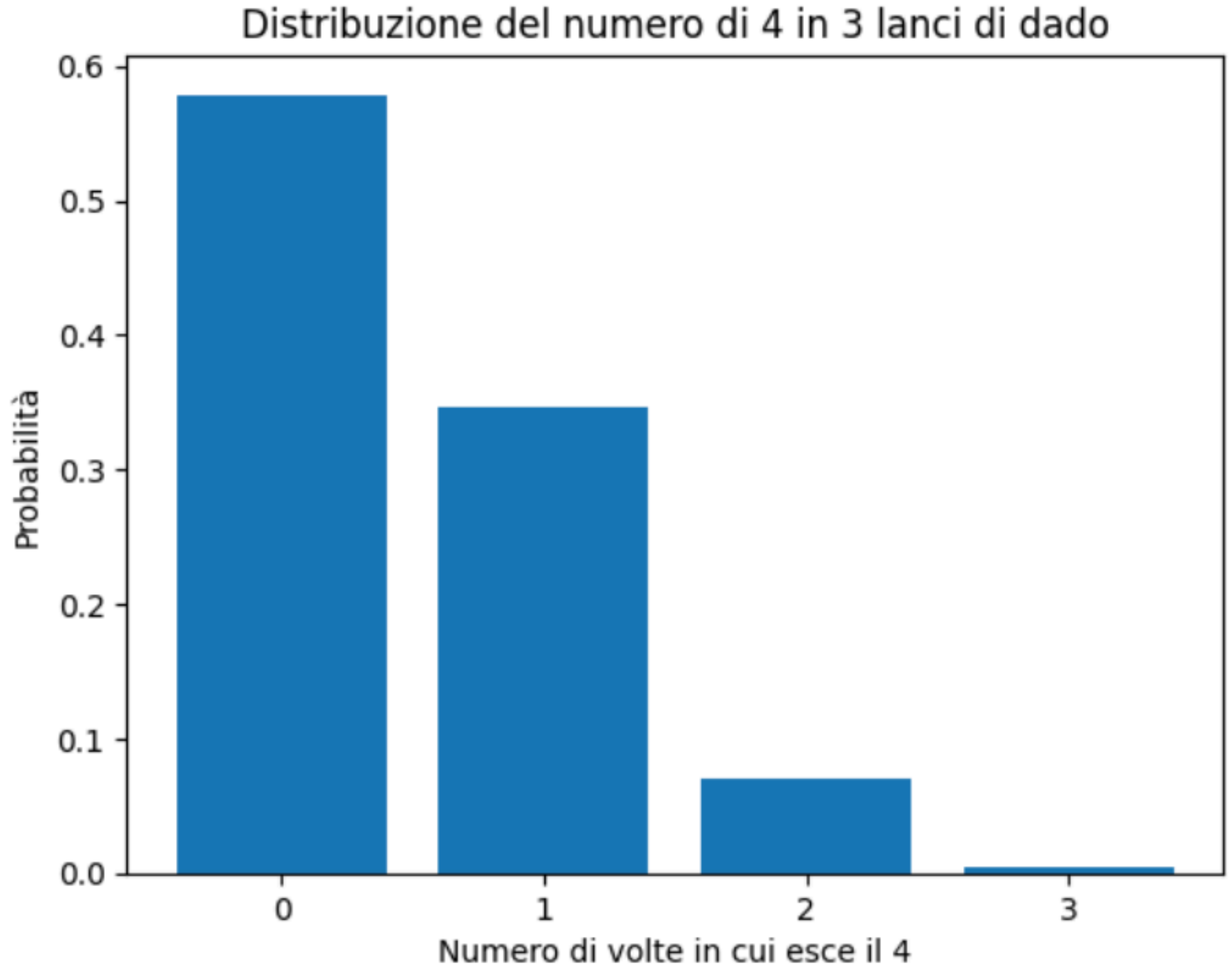


La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio 3 dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4).

Qual è la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano ν volte 4, con ν **= 0, 1, 2 o 3?**

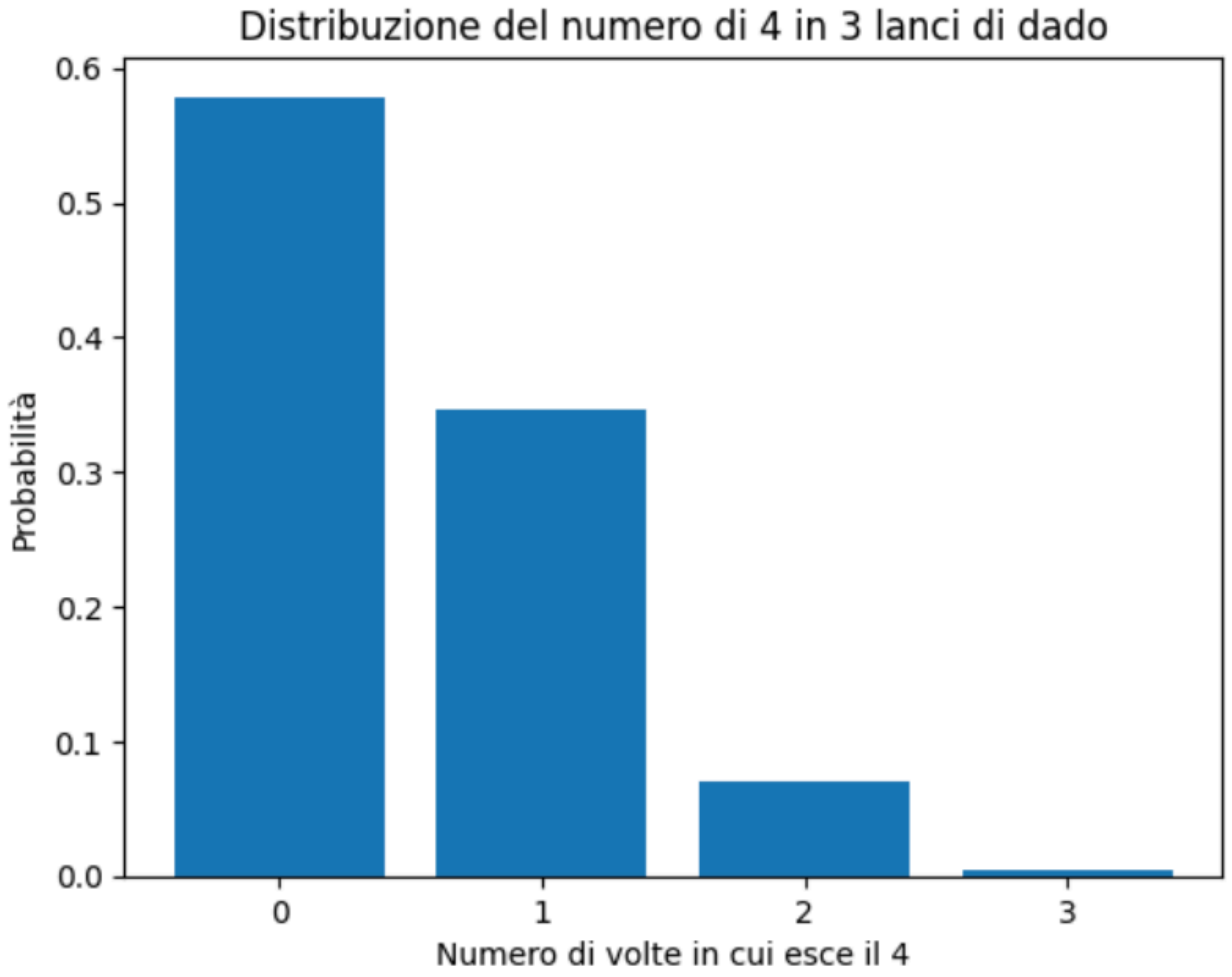
Numero di 4	Probabilità	Percentuale
0	125/216	57,87%
1	75/216	34,72%
2	15/216	6,94%
3	1/216	0,46%



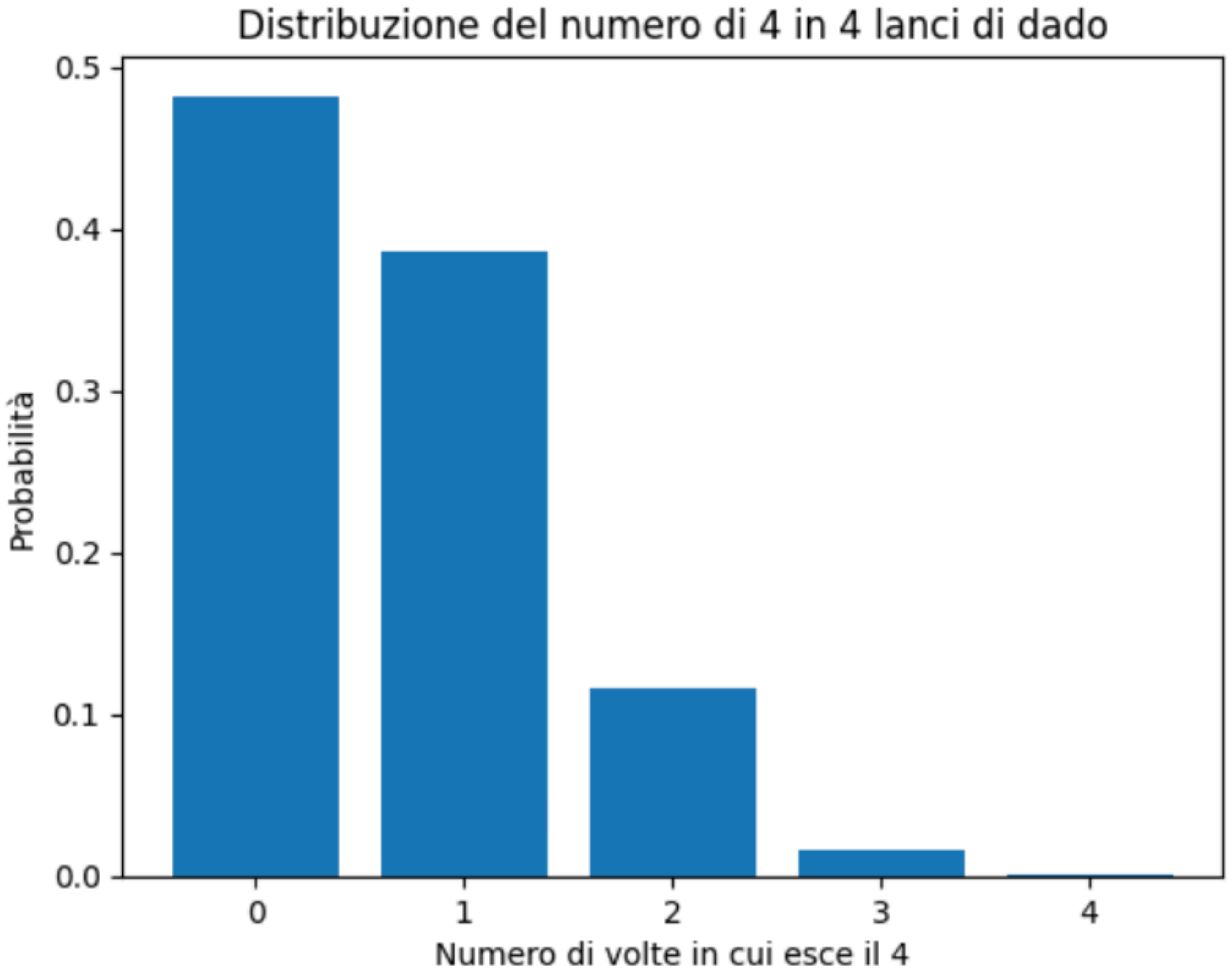
La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

3 lanci



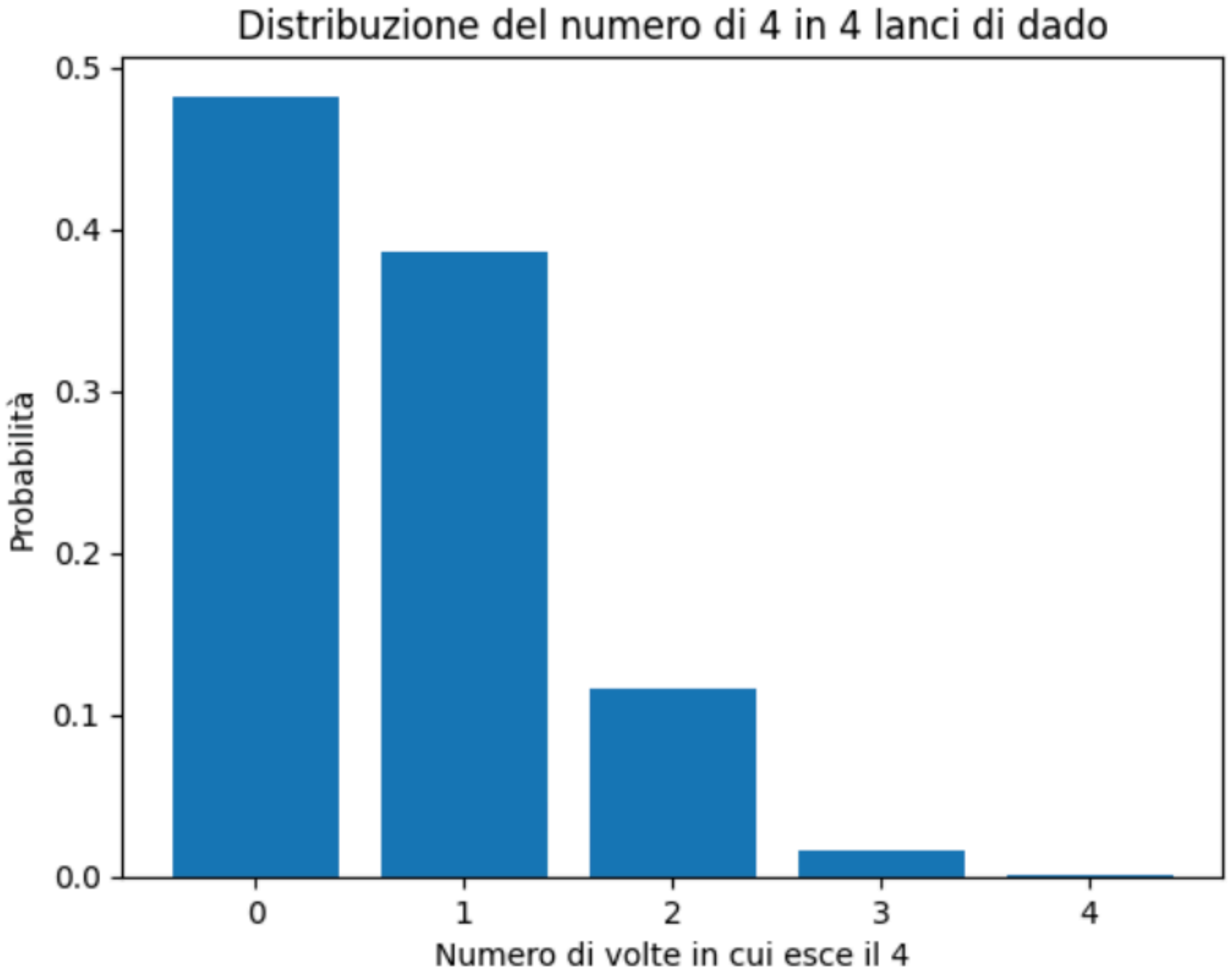
4 lanci



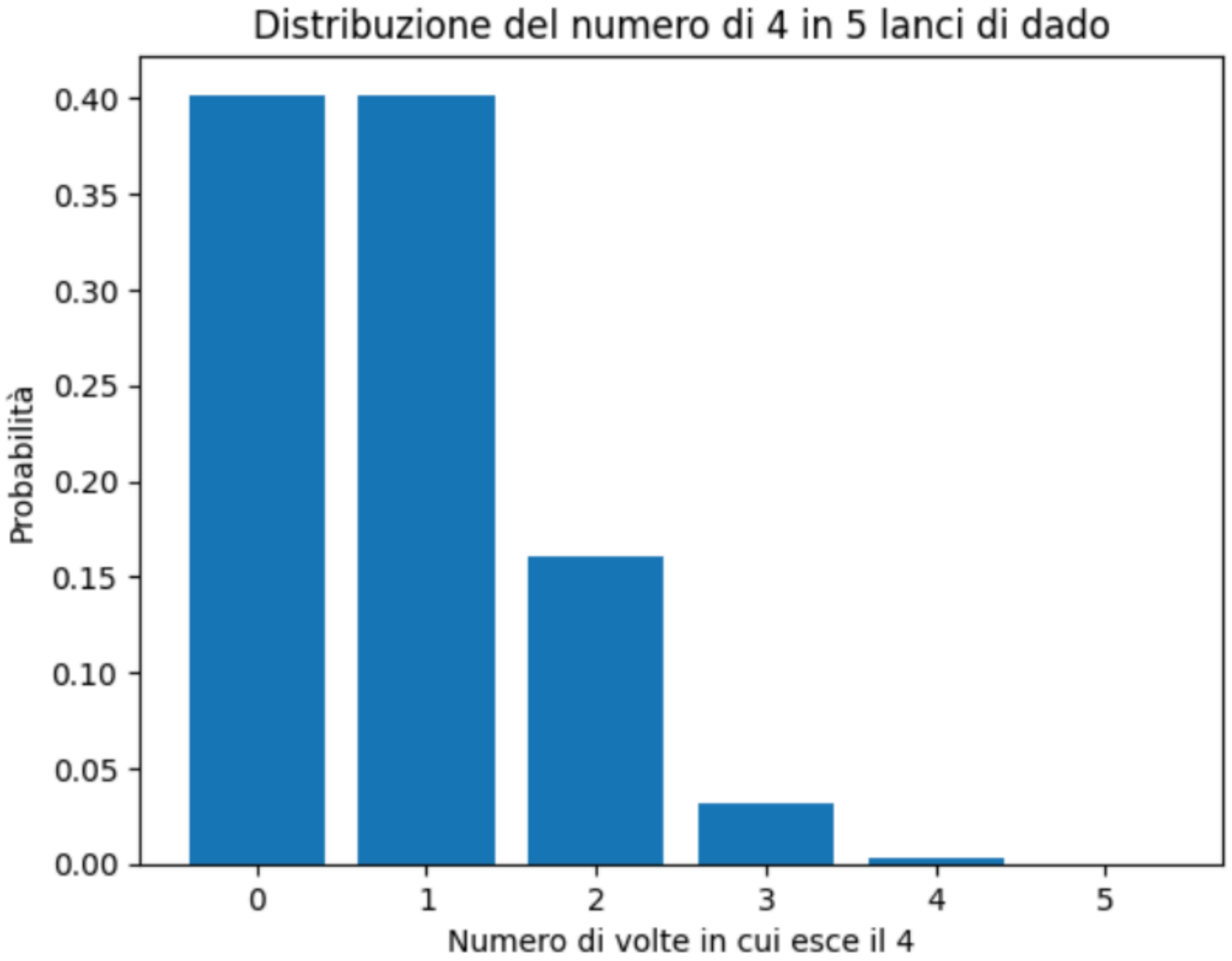
La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

4 lanci



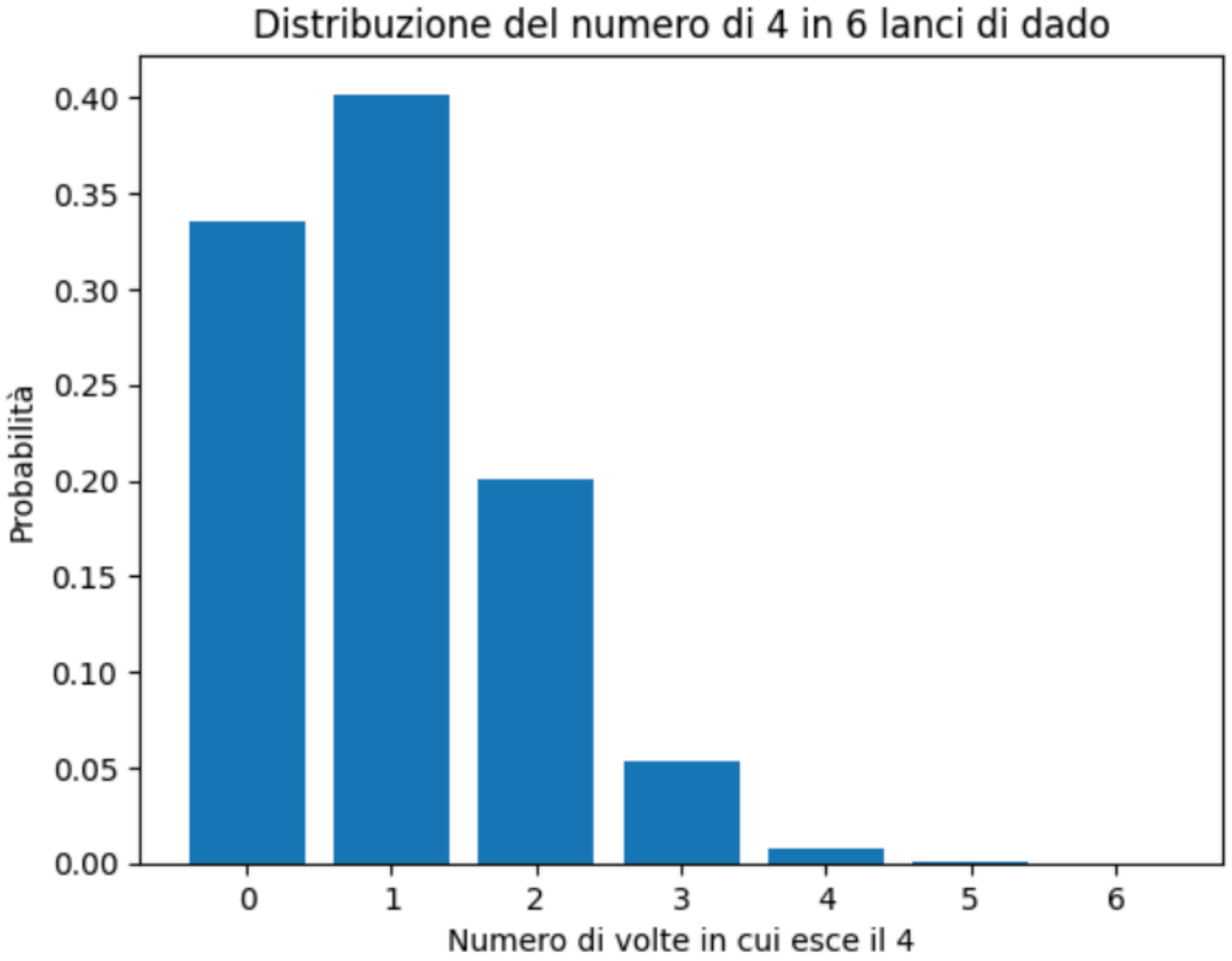
5 lanci



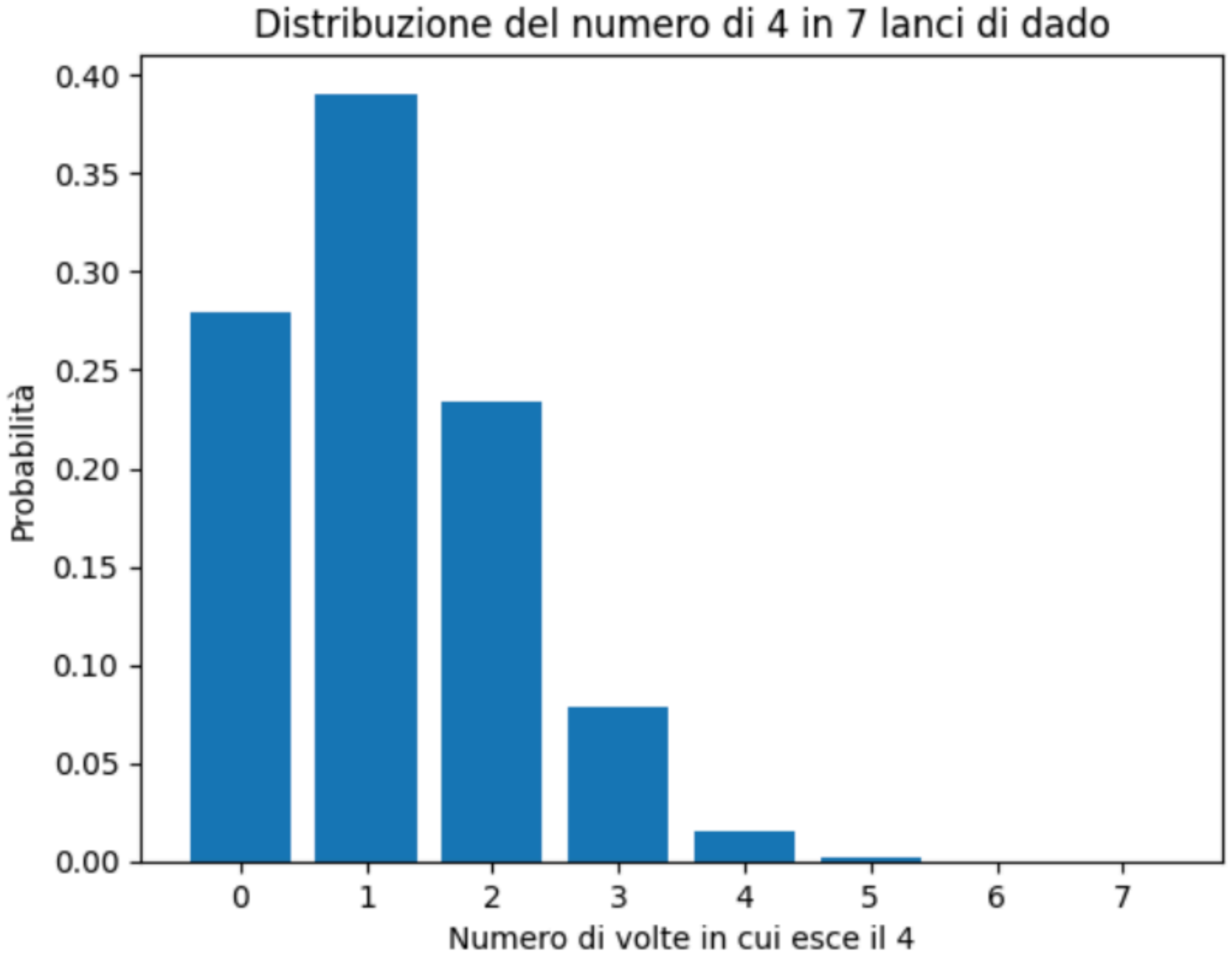
La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

6 lanci



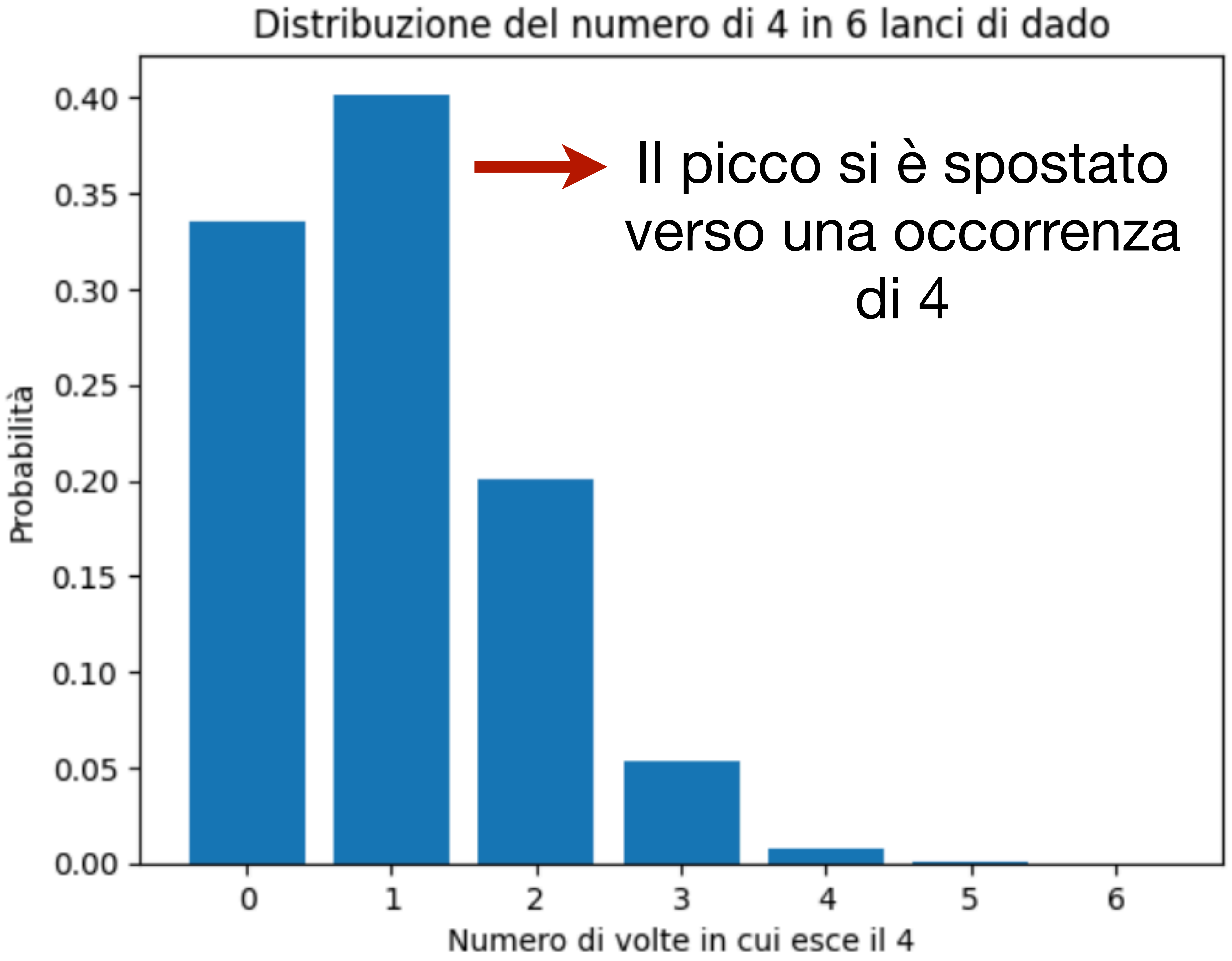
7 lanci



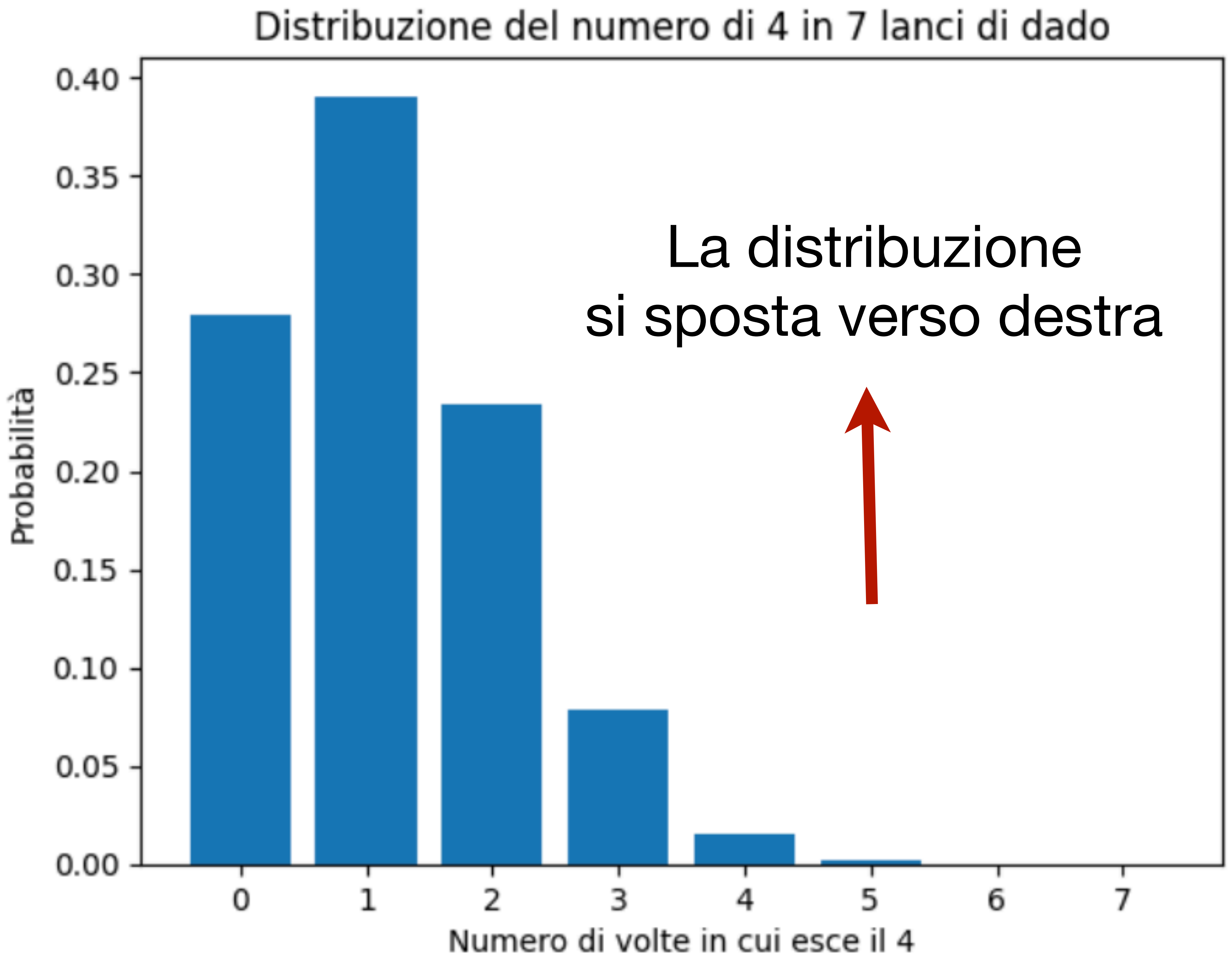
La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

6 lanci



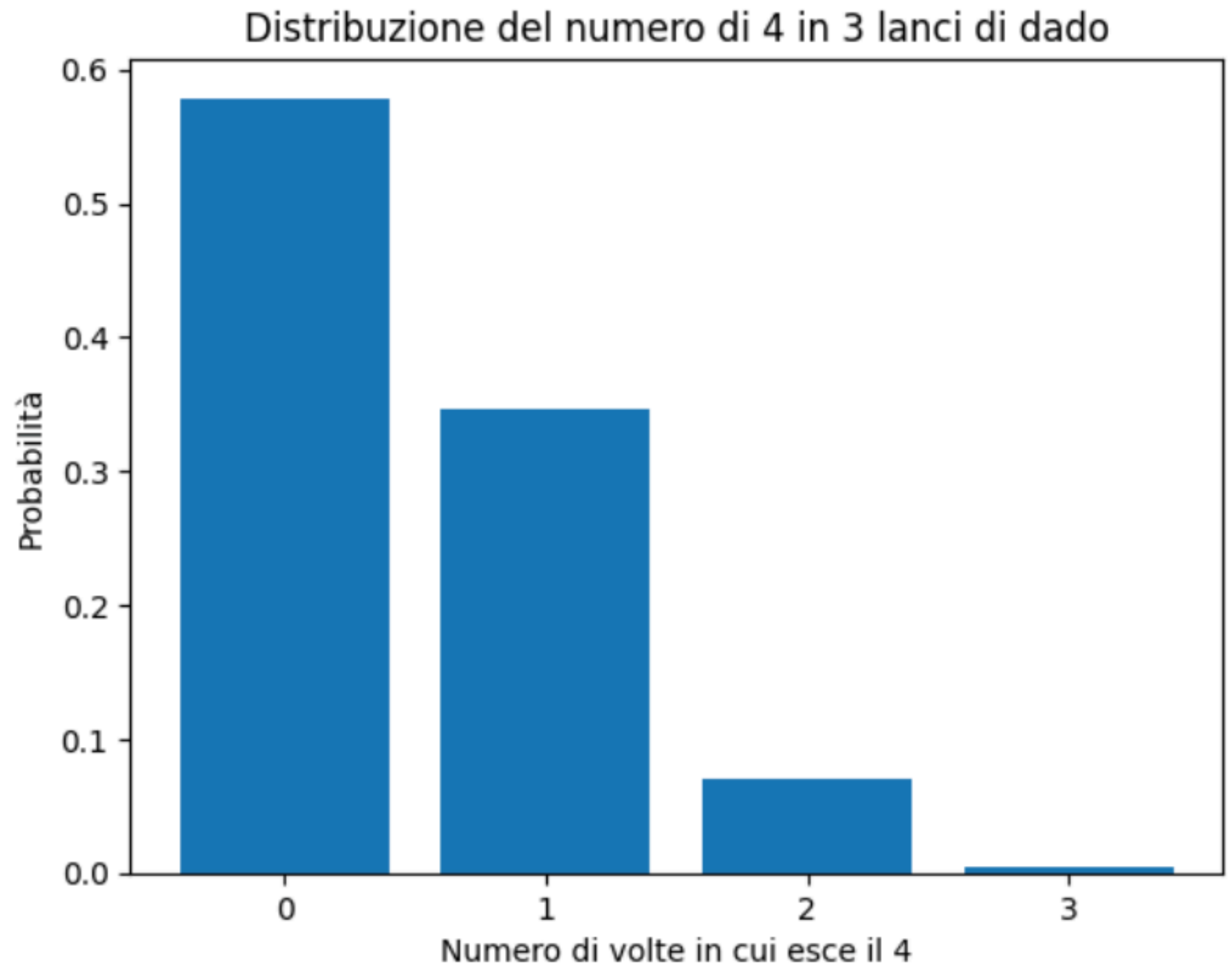
7 lanci



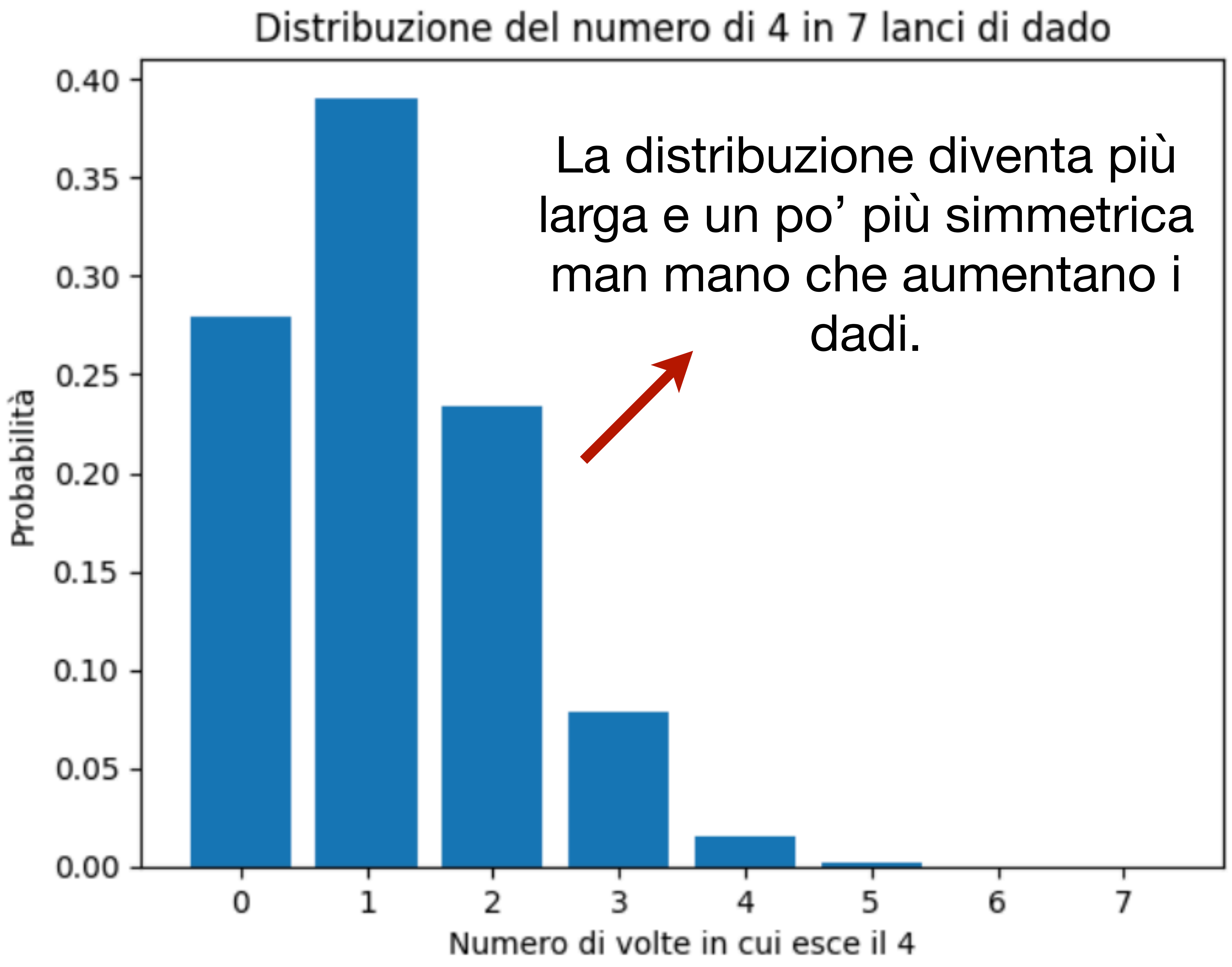
La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

3 lanci



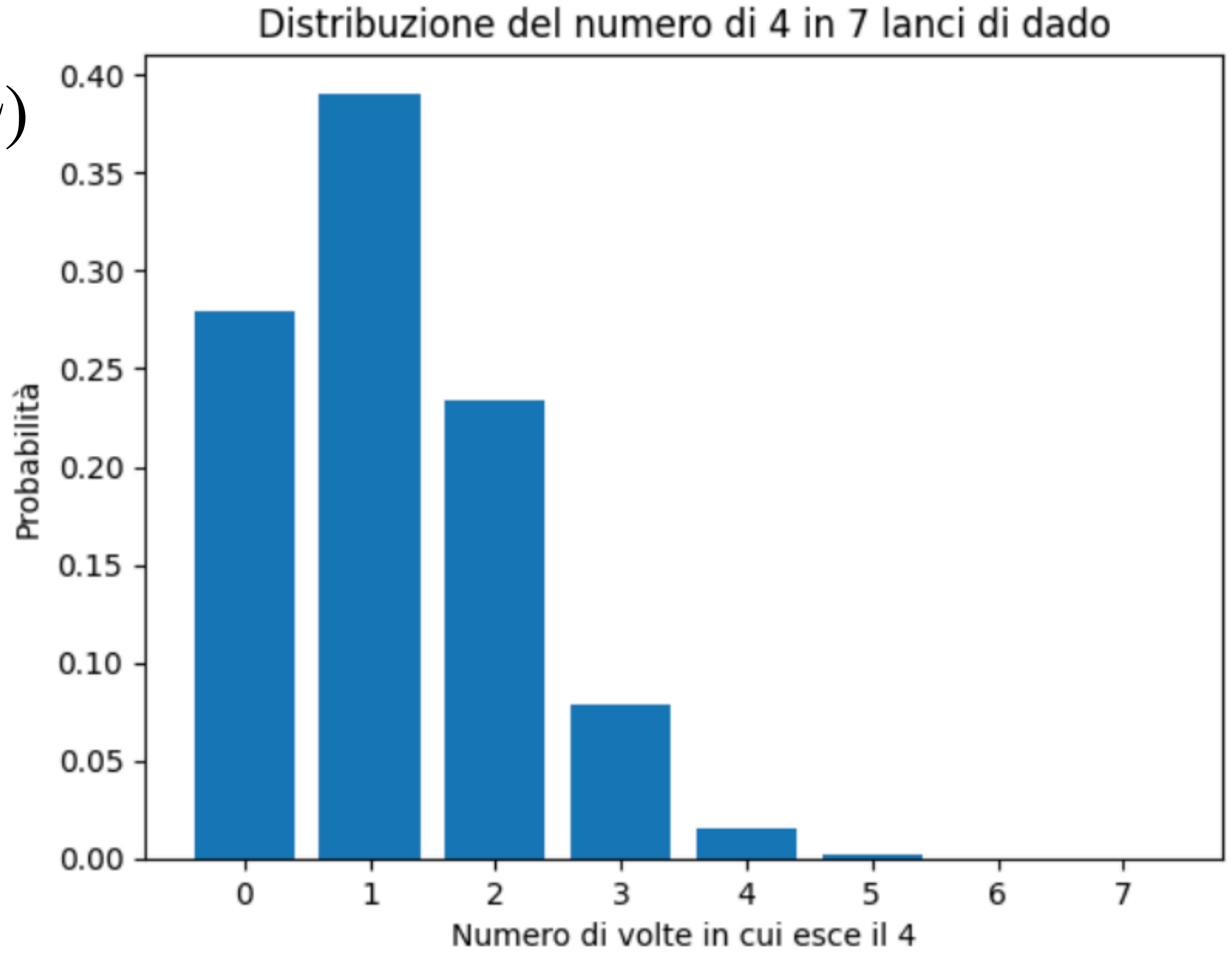
7 lanci



La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

$b_{7,1/6}(\nu)$



ν

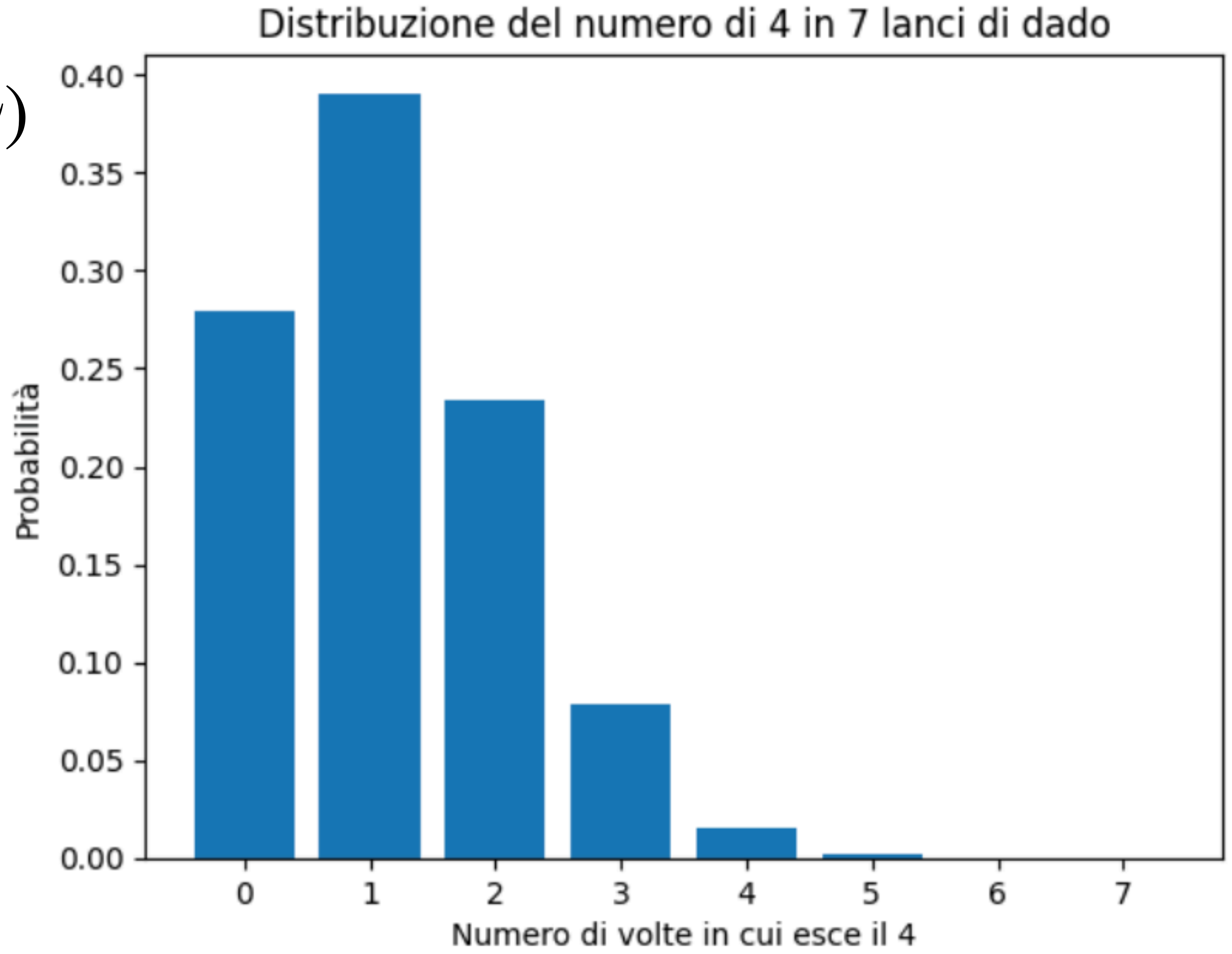
→ Esempio di una distribuzione binomiale $b_{n,p}(\nu)$

ν

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

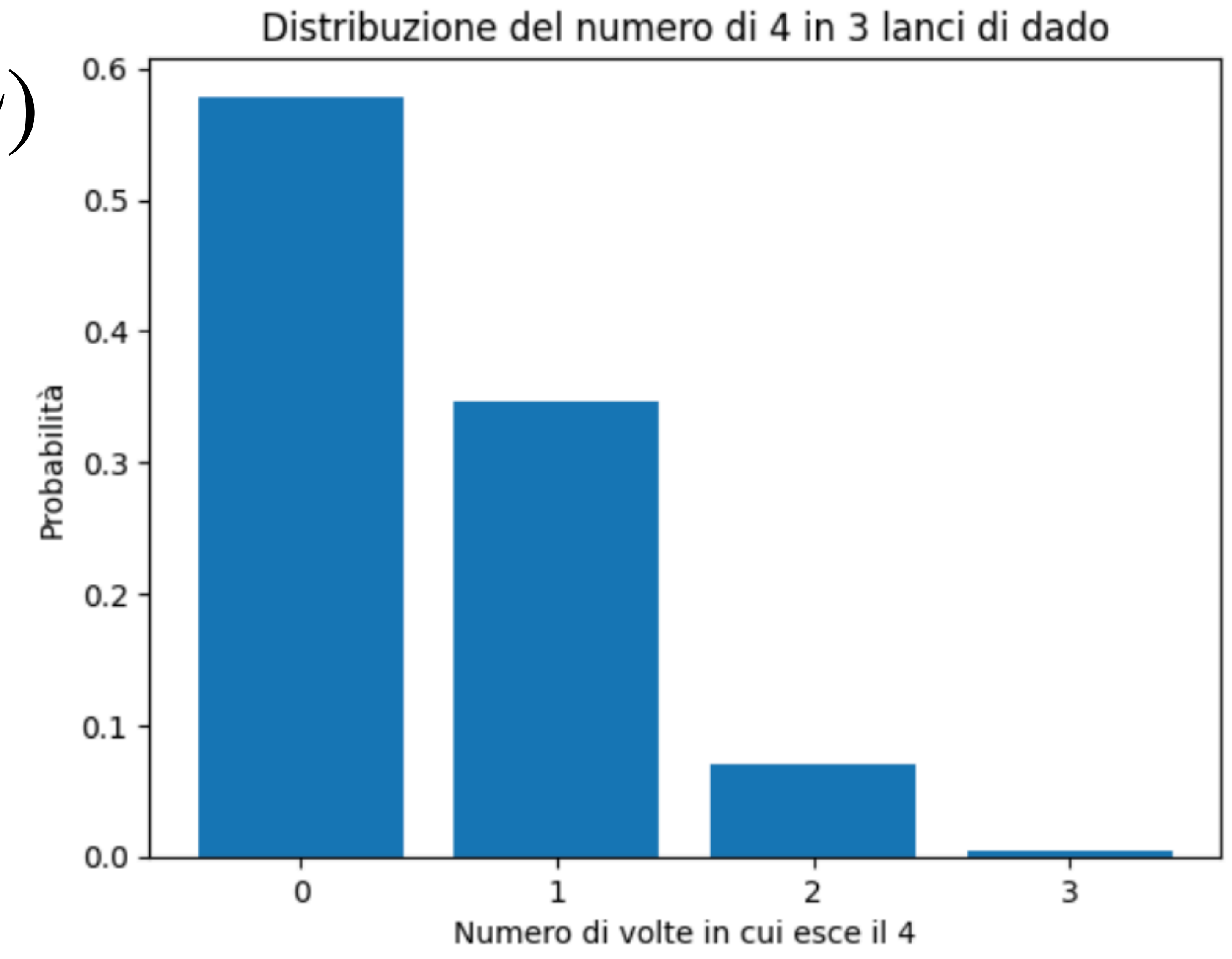
$b_{7,1/6}(\nu)$



ν

→ Esempi di distribuzione binomiale $b_{n,p}(\nu)$

$b_{3,1/6}(\nu)$

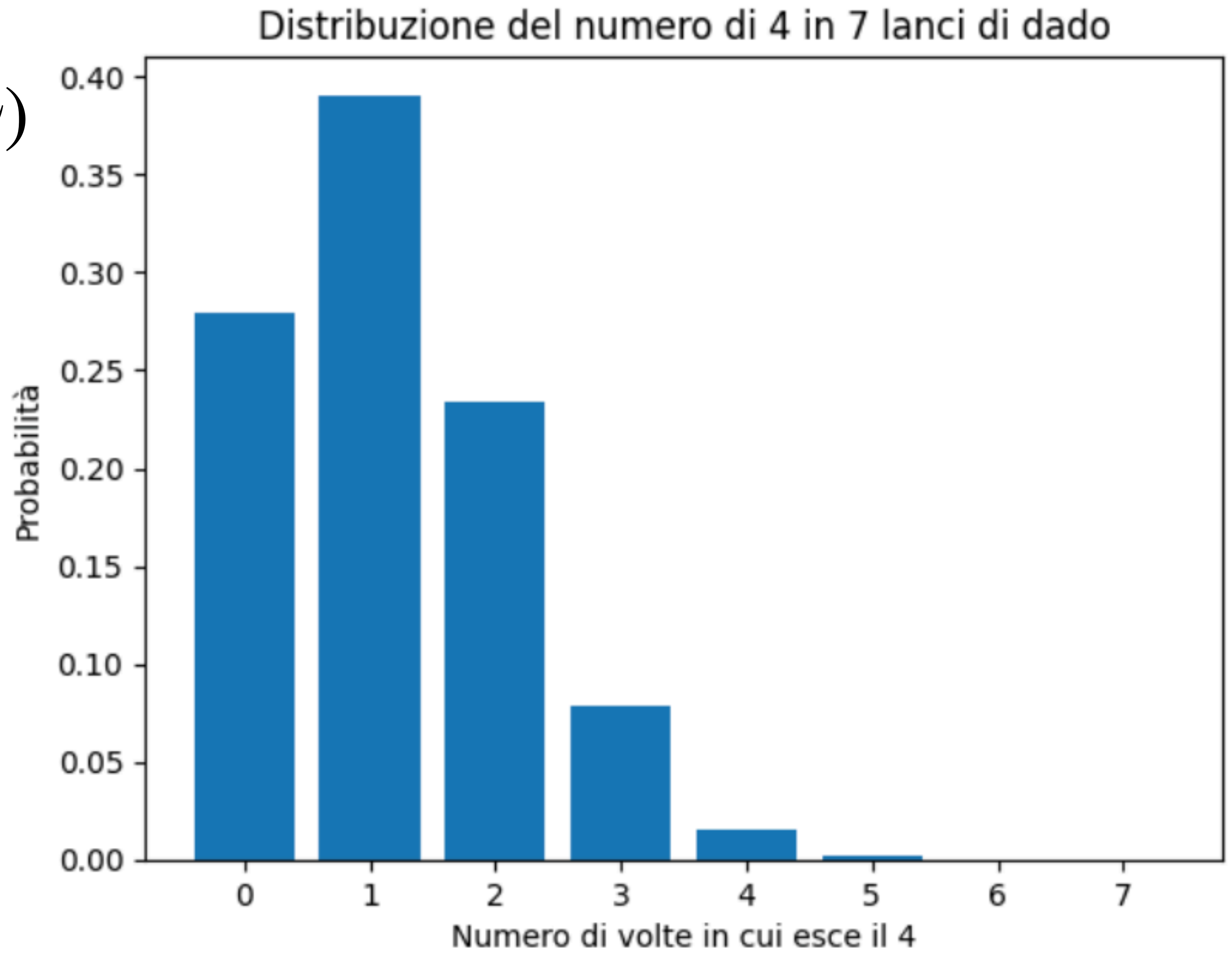


ν

La distribuzione binomiale

Esperimento: lancio di dadi. Lancio **più** dadi e conto il numero di volte che esce una data faccia (ad esempio quella che mostra il 4)

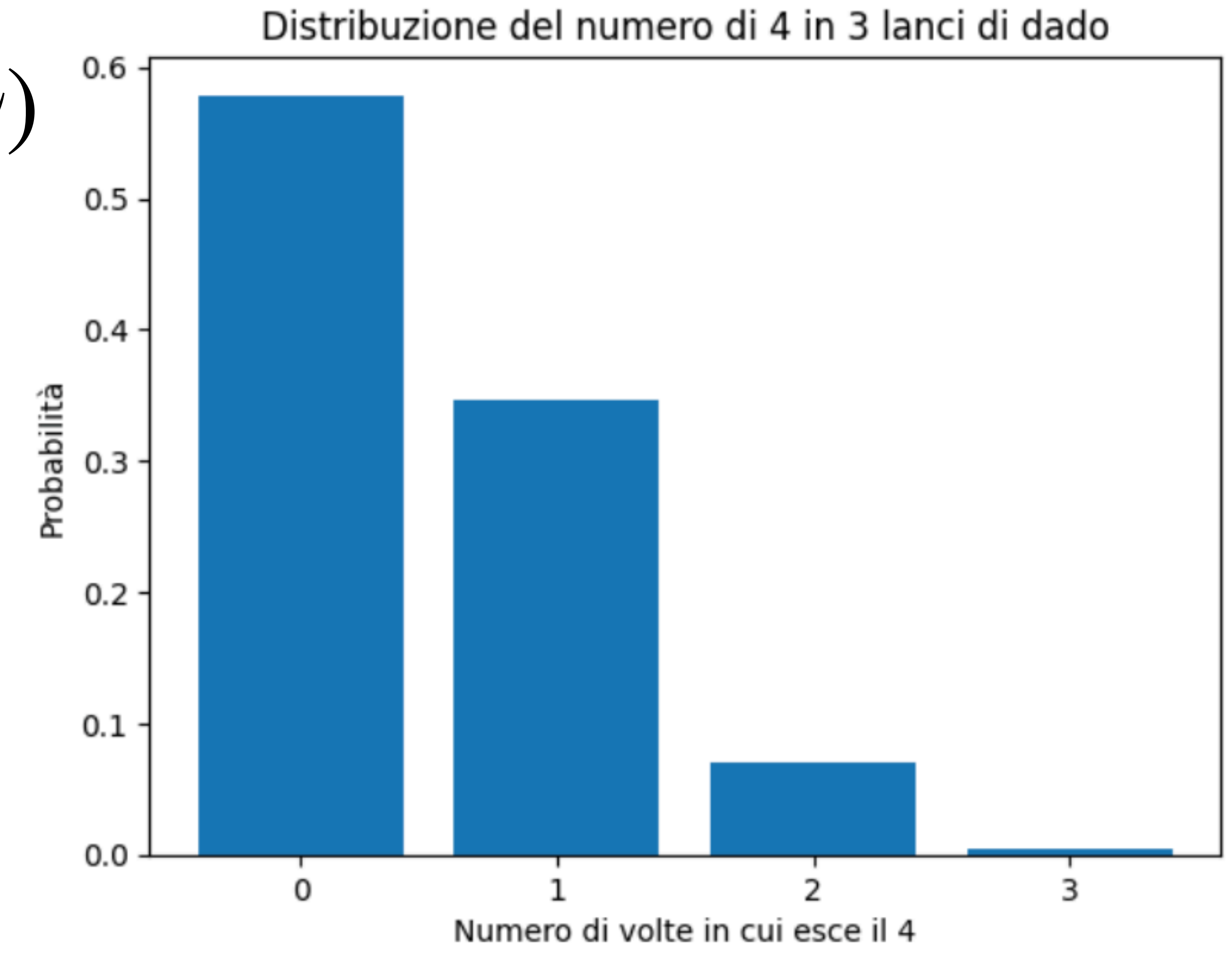
$b_{7,1/6}(\nu)$



ν

→ Esempi di distribuzione binomiale $b_{n,p}(\nu)$

$b_{3,1/6}(\nu)$



ν

Ripetendo l'esperimento un grande numero di volte ottengo la **distribuzione limite** → Qual è la probabilità che, a seguito di un grande numero di lanci, si ottengano ν volte una data faccia?

La distribuzione binomiale: definizione

n prove indipendenti

ogni prova può avere varie uscite

uscita considerata: **successo**

p —> probabilità di successo in una prova

q = 1 - p —> insuccesso

Cerco la **probabilità di ottenere ν successi in n prove:**

questa probabilità è data dalla distribuzione binomiale

$$P(\nu \text{ successi in } n \text{ prove}) = b_{n,p}(\nu) = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times \nu} p^{\nu} q^{n-\nu}$$

La distribuzione binomiale: definizione

$$P(\nu \textit{ successi in } n \textit{ prove}) = b_{n,p}(\nu) = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\times 2\times\cdots\times\nu} p^{\nu} q^{n-\nu}$$

binomiale

la distribuzione dipende
da n —> numero di prove fatte
e da p —> la probabilità di successo
in una prova

La distribuzione è detta binomiale per la sua connessione con lo sviluppo binomiale.

Coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\times 2\times\cdots\times\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

La distribuzione binomiale: definizione

Coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\times 2\times\cdots\times \nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

Notazione **fattoriale:**

$$n! = 1\times 2\times\cdots\times n$$

Nello sviluppo di un binomio:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \cdots + q^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

Distribuzione binomiale:

$$P(\nu \text{ successi in } n \text{ prove}) = b_{n,p}(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

La distribuzione binomiale: proprietà

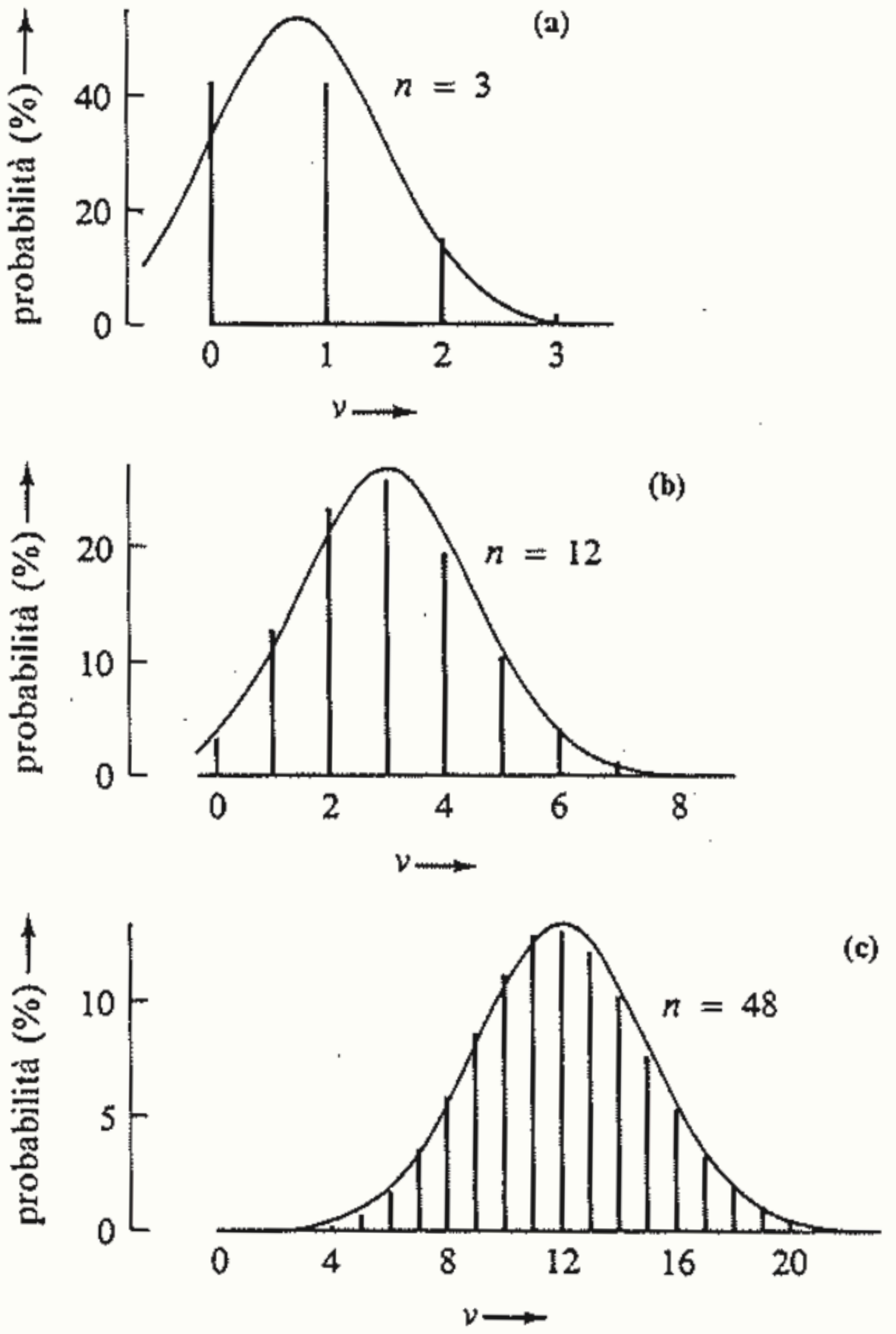


Figura 10.3. *Le distribuzioni binomiali con* $p = \frac{1}{4}$ *e* $n = 3, 12,$ *e 48. La curva continua sovrapposta su ciascun disegno è la funzione di Gauss con la stessa media e la stessa deviazione standard.*

La distribuzione binomiale: proprietà

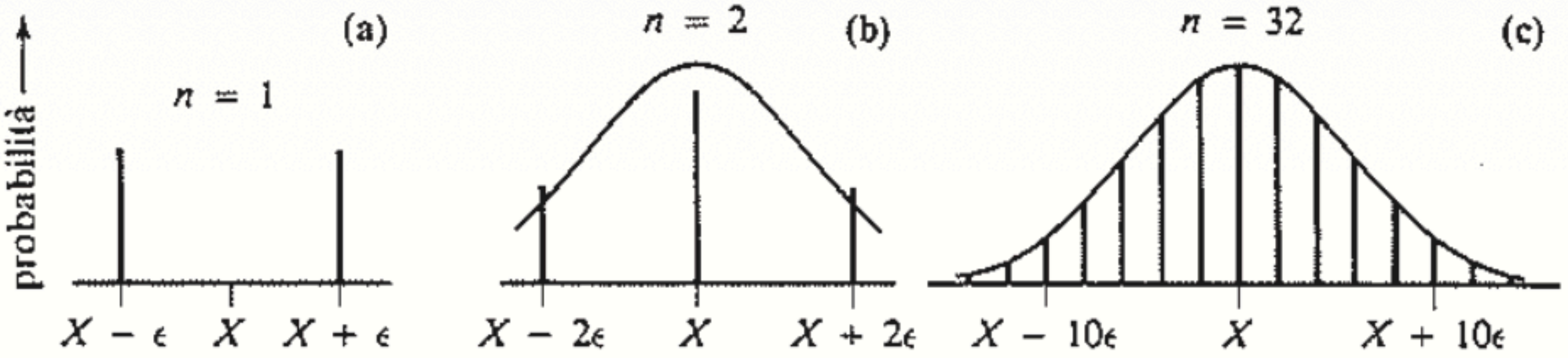


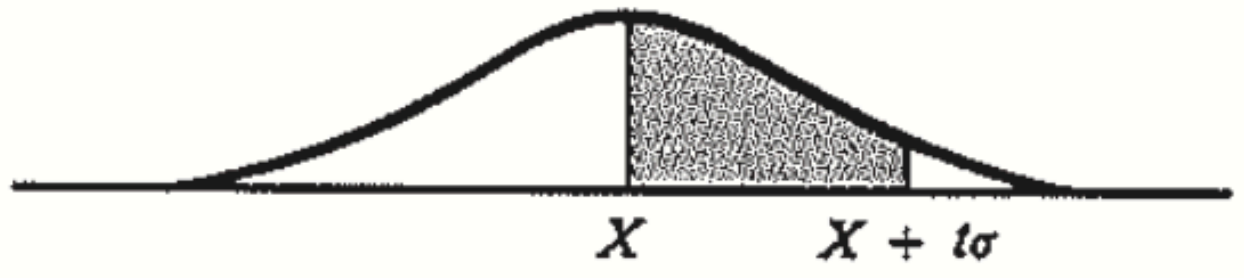
Figura 10.5. *Distribuzione di misure soggette ad* n *errori casuali di grandezza* ε, *per* n = 1,2 *e* 32. *Le curve continue sovrapposte su (b) e (c) sono le Gaussiane con lo stesso centro e larghezza. (Le scale verticali sono diverse nei tre grafici).*

La distribuzione binomiale: proprietà

APPENDICE B

Integrale Normale degli Errori, II

Tabella B. **La probabilità percentuale,**
$Q(t) = \int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$,
come una funzione di t.



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.53
0.2	7.93	8.32	8.71	9.10	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.80	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17.00	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.50	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.90	22.24
0.6	22.57	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.17	25.49
0.7	25.80	26.11	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.10	29.39	29.67	29.95	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.40	33.65	33.89
1.0	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.70	37.90	38.10	38.30
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.80	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.70	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.50	47.56	47.61	47.67
2.0	47.72	47.78	47.83	47.88	47.93	47.98	48.03	48.08	48.12	48.17
2.1	48.21	48.26	48.30	48.34	48.38	48.42	48.46	48.50	48.54	48.57
2.2	48.61	48.64	48.68	48.71	48.75	48.78	48.81	48.84	48.87	48.90
2.3	48.93	48.96	48.98	49.01	49.04	49.06	49.09	49.11	49.13	49.16
2.4	49.18	49.20	49.22	49.25	49.27	49.29	49.31	49.32	49.34	49.36
2.5	49.38	49.40	49.41	49.43	49.45	49.46	49.48	49.49	49.51	49.52
2.6	49.53	49.55	49.56	49.57	49.59	49.60	49.61	49.62	49.63	49.64
2.7	49.65	49.66	49.67	49.68	49.69	49.70	49.71	49.72	49.73	49.74
2.8	49.74	49.75	49.76	49.77	49.77	49.78	49.79	49.79	49.80	49.81
2.9	49.81	49.82	49.82	49.83	49.84	49.84	49.85	49.85	49.86	49.86
3.0	49.87	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	49.98	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	49.997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	49.9997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	49.99997	—	—	—	—	—	—	—	—	—