Geometria 2 2025/26
Foglio di esercizi 9

Prof. Valentina Beorchia

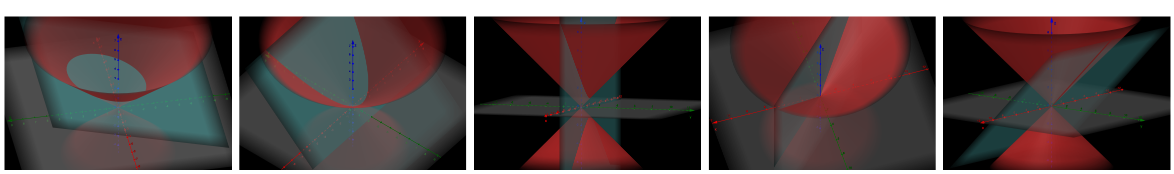
20 maggio 2026

1. (a) Due coniche affini C e C' di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ si dicono tangenti in un punto $P \in \mathbb{A}^2$ se $P \in C \cap C'$, P è non singolare per entrambe, e in tale punto le rette tangenti $T_P C$ e $T_P C'$ coincidono: $T_P C = T_P C'$.

   Si caratterizzino tutte le coniche tangenti alla conica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ nel punto $P = (2, 0)$.

   (b) Due coniche affini C e C' di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ si dicono bitangenti nei punti $P, Q \in \mathbb{A}^2$ se $\{P, Q\} \subseteq C \cap C'$, P e Q sono non singolari per entrambe, e in tali punti le rette tangenti coincidono:
$$T_P C = T_P C', \quad T_Q C = T_Q C'.$$
   Si caratterizzino tutte le coniche bitangenti alla conica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ nei punti
$$P = (2, 0), \quad Q = (-2, 0).$$

2. Si verifichi che ogni conica affine piana reale può essere ottenuta come intersezione del cono circolare $Z \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ a due falde di
$$x^2 + y^2 = z^2$$
e di un opportuno piano affine.



3. Si dimostri che le chiusure proiettive della parabola affine $x^2 - y = 0$ e dell' iperbole affine $xy - 1 = 0$ sono proiettivamente equivalenti.

4. Siano
$$(a_0 : a_1 : a_2),\ (b_0 : b_1 : b_2),\ (c_0 : c_1 : c_2),\ (d_0 : d_1 : d_2),\ (e_0 : e_1 : e_2)$$
cinque punti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Si dimosti che esiste una unica conica proiettiva passante per i cinque punti se e solo se la matrice
$$\begin{pmatrix} a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \end{pmatrix}$$
ha rango massimo, e che in questo caso tale conica ha equazione
$$\det \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

5. Si verifichi che per i punti
$$(1 : 0 : 0),\ (1 : 0 : 1),\ (1 : 1 : 0),\ (0 : 0 : 1),\ (0 : 1 : 0)$$
passa un'unica conica, e si detrmini un'equazione di tale conica.

6. Si verifichi che per i punti
$$(1 : 0 : 0),\ (1 : 0 : 1),\ (0 : 0 : 1),\ (-1 : 0 : 1),\ (0 : 1 : 0)$$
passa più di una conica, e si determini un'equazione della generica conica passante per tali punti.

7. Si consideri la circonferenza affine C di equazione
$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
e si consideri il fascio di rette di centro il punto $(1, 0)$, di equazione
$$x + ty - 1 = 0.$$

(a) Si determinino le intersezioni di una generica retta del fascio e di C;

(b) se ne deduca che esistono infinite terne pitagoriche non proporzionali, cioè terne di numeri naturali

$$(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$$

tali che

$$p^2 + q^2 = r^2.$$