Assiomi della geometria tarskiana, semplificati

Eugenio G. Omodeo

20 aprile 2016

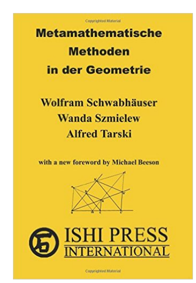
Wanda Szmielew
(1918–1976)

1 Assiomi, versione 1965 (pubblicata nel 1983)

	CE_2			
1.	ab	$\equiv$	ba	(RE)
2.	$ab \equiv pq \ \&\ ab \equiv rs$	$\rightarrow$	$pq \equiv rs$	(TE)
3.	$ab \equiv cc$	$\rightarrow$	$a = b$	(IE)
4.	$\exists\, x \big(B \bullet ax$	$\&$	$ax \equiv \bullet\bullet \big)$	(SC)
5.	$a \neq b \ \&\ B\,abc \ \&\ B\,a'b'c' \ \&\ ab \equiv a'b' \ \&$ $bc \equiv b'c' \ \&\ ad \equiv a'd' \ \&\ bd \equiv b'd'$	$\rightarrow$	$cd \equiv c'd'$	(FS)
6.	$B\,aba$	$\rightarrow$	$a = b$	(IB)
7.	$B\,apc \ \&\ B\,bqc$	$\rightarrow$	$\exists\, x \,\big(B\,pxb \ \&\ B\,qxa \big)$	(IP)
8.	$\exists\, a\, \exists\, b\, \exists\, c \big(\neg B\,abc$	$\&$	$\neg B\,bca \quad \& \quad \neg B\,cab \big)$	(Lo_2)
9.	$p \neq q \ \&\ ap \equiv aq \ \&\ bp \equiv bq \ \&\ cp \equiv cq$	$\rightarrow$	$B\,abc \vee B\,bca \vee B\,cab$	(Up_2)
10.	$B\,adt \ \&\ B\,bdc \ \&\ a \neq d$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \exists\, y \,\big(B\,abx \ \&\ B\,acy \ \&\ B\,xty \big)$	(Eu)
11.	$\exists\, a\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(x \in X \ \&\ y \in Y \ \rightarrow\ B\,axy \big)$	$\rightarrow$	$\exists\, b\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(x \in X \ \&\ y \in Y \ \rightarrow\ B\,xby \big)$	(Co)

Legenda:

(RE) Assioma di riflessività per l'$\boxed{\textit{equidistanza}}$
(TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
(IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
(SC) Assioma di costruzione di segmenti
(FS) Assioma dei 5 segmenti
(IB) Assioma d'identità per l'$\boxed{\textit{intermedietà}}$
(IP) Assioma interno di Pasch
(Lo_2) Assioma 2-dimensionale inferiore
(Up_2) Assioma 2-dimensionale superiore
(Eu) Assioma euclideo
(Co) [Schema(?) d']assioma di continuità



2 Skolemizzazione di due degli assiomi

Per '*skolemizzare*' (SC) ed (IP), possiamo introdurre due simboli di funzione,

$$\mathsf{ext}(\_,\_,\_,\_)\,, \qquad \mathsf{ip}(\_,\_,\_,\_,\_)\,,$$

per poi riscrivere gli assiomi in questione cosí:

$$\begin{array}{rcll} B\,q\,a\,\mathsf{ext}(q\,,\,a\,,\,b\,,\,c\,) & \& & a\,\mathsf{ext}(q\,,\,a\,,\,b\,,\,c\,) \equiv b\,c & (\mathrm{SC}^{\mathsf{sk}}) \\ B\,apc\,\&\,B\,bqc & \rightarrow & B\,p\,\mathsf{ip}(a\,,\,p\,,\,c\,,\,b\,,\,q\,)\,b\,\&\,B\,q\,\mathsf{ip}(a\,,\,p\,,\,c\,,\,b\,,\,q\,)\,a & (\mathrm{IP}^{\mathsf{sk}}) \end{array}$$

3 Cosa cambia rispetto agli assiomi del 1959?

La versione degli assiomi del 1965 non comprende piú gli assiomi di *transitività* (esterna) e di *connettività* (esterna),

$$\begin{array}{rcl} B\,abd\,\&\,B\,bcd & \rightarrow & B\,abc \\ a \neq b\,\&\,B\,abc\,\&\,B\,abd & \rightarrow & B\,acd \vee B\,adc\,, \end{array}$$

che frattanto Haragauri Narayan Gupta, nel corso della tesi di dottorato (svolta sotto la supervisione di Alfred Tarski e di Leon A. Henkin), è riuscito a dedurre dagli altri assiomi. Semplificazioni notevoli agli assiomi formulati da Gupta sono state apportate dalla Szmielew.

Inoltre l'assioma di Pasch è formulato in maniera diversa da prima; dalla versione *esterna* ('*outer*' in inglese) siamo passati a quella *interna* ('*inner*', vedi Fig. 1):

$$\begin{array}{r|lcl|l} 7. & B\,apc\,\&\,B\,bqc & \rightarrow & \exists x\,\big(B\,pxb\,\&\,B\,qxa\,\big) & (\mathrm{IP}) \\ 12. & B\,apc\,\&\,B\,qcb & \rightarrow & \exists x\,\big(B\,axq\,\&\,B\,bpx\,\big) & (\mathrm{OP}) \\ 12'. & B\,apc\,\&\,B\,qcb & \rightarrow & \exists x\,\big(B\,axq\,\&\,B\,xpb\,\big) & (\mathrm{OP}') \end{array}$$

(Una riformulazione della versione esterna, da (OP′) ad (OP), era già intervenuta fra il 1951 e il 1959 — ritocco simile aveva subíto anche (Eu)).

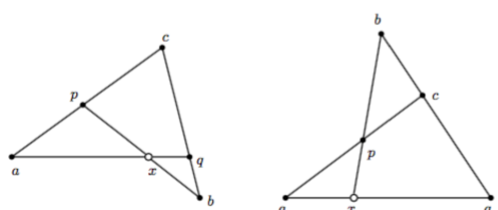


Figura 1: Diagrammi raffiguranti le due versioni—(IP) ed (OP)—dell'assioma di Pasch.

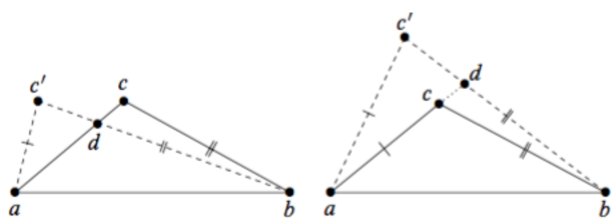
4 Degli assiomi del 1951, quali erano già spariti nel 1959?

La versione degli assiomi del 1951[1] comprende sei enunciati riguardanti la relazione d'intermedietà (non stretta), quattro dei quali spariranno nella versione del 1959, in quanto Tarski e due suoi allievi[2] saranno riusciti (nel 1956–57) a dedurli dagli altri assiomi; gli altri due spariranno—anni dopo—come riferito nella sezione precedente. I sei assiomi in questione sono:

$$
\begin{array}{rcllll}
 & & B\,abb & & \text{riflessività} \\
B\,abc & \rightarrow & B\,cba & & \text{(SB)} & \text{simmetria} \\
b \neq c \;\&\; B\,abc \;\&\; B\,bcd & \rightarrow & B\,abd & & & \text{transitività esterna} \\
B\,abd \;\&\; B\,acd & \rightarrow & B\,abc \vee B\,acb & & & \text{connettività interna} \\
B\,abd \;\&\; B\,bcd & \rightarrow & B\,abc & & & \text{transitività interna} \\
a \neq b \;\&\; B\,abc \;\&\; B\,abd & \rightarrow & B\,acd \vee B\,adc & & & \text{connettività esterna}
\end{array}
$$

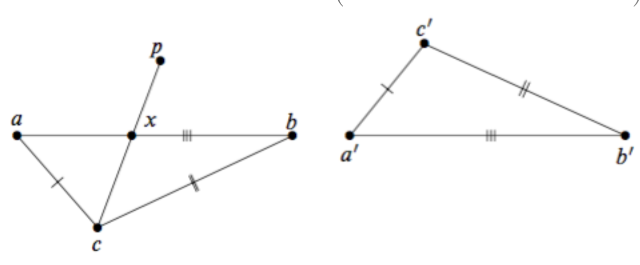
Intervengono fra il 1951 e il 1959 anche la sparizione dell'*assioma di unicità per la costruzione di triangoli*:

$$a \neq b \;\&\; ac \equiv ac' \;\&\; bc \equiv bc' \;\&\; B\,bdc' \;\&\; \big(B\,adc \vee B\,acd\big) \quad\rightarrow\quad c = c'$$



e quella dell'*assioma di esistenza per la costruzione di triangoli*:

$$ab \equiv a'b' \quad\rightarrow\quad \exists\, c\, \exists\, x \Big(ac \equiv a'c' \;\&\; bc \equiv b'c' \;\&\; B\,cx\bullet \;\& \\ \big(B\,abx \vee B\,bxa \vee B\,xab\big)\Big)$$



[1]Non disponendo della versione del rapporto RAND antecedente le revisioni del 1951, non possiamo stabilire se modifiche degli assiomi siano intervenute fra il 1948 e il 1951.

[2]Eva Callin e Scott Taylor.

5 Assiomi semplificati da Makarios, ca. 2013

	CE_2'			
~~1.~~	$\cancel{ab}$	$\cancel{\equiv}$	$\cancel{ba}$	~~(RE)~~
2.	$ab \equiv pq \;\&\; ab \equiv rs$	$\to$	$pq \equiv rs$	(TE)
3.	$ab \equiv cc$	$\to$	$a = b$	(IE)
4.	$\exists\, x \big(\, B\, qax$	$\&$	$ax \equiv bc \,\big)$	(SC)
5′.	$a \neq b \;\&\; B\, abc \;\&\; B\, a'b'c' \;\&\; ab \equiv a'b' \;\&$			(FS′)
	$bc \equiv b'c' \;\&\; ad \equiv a'd' \;\&\; bd \equiv b'd'$	$\to$	$dc \equiv c'd'$	
6.	$B\, aba$	$\to$	$a = b$	(IB)
7.	$B\, apc \;\&\; B\, bqc$	$\to$	$\exists\, x \,\big(\, B\, pxb \;\&\; B\, qxa \,\big)$	(IP)
8.	$\exists\, a\, \exists\, b\, \exists\, c \big(\, \neg B\, abc$	$\&$	$\neg B\, bca \quad \& \quad \neg B\, cab \,\big)$	(Lo$_2$)
9.	$p \neq q \;\&\; ap \equiv aq \;\&\; bp \equiv bq \;\&\; cp \equiv cq$	$\to$	$B\, abc \vee B\, bca \vee B\, cab$	(Up$_2$)
10.	$B\, adt \;\&\; B\, bdc \;\&\; a \neq d$	$\to$	$\exists\, x\, \exists\, y \,\big(\, B\, abx \;\&\; B\, acy \;\&\; B\, xty \,\big)$	(Eu)
11.	$\exists\, a\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(\, x \in X \;\&\; y \in Y \;\to\; B\, axy \,\big)$	$\to$	$\exists\, b\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(\, x \in X \;\&\; y \in Y \;\to\; B\, xby \,\big)$	(Co)

Legenda:

(RE) Assioma di riflessività per l'equidistanza
(TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
(IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
(SC) Assioma di costruzione di segmenti
(FS′) Assioma dei 5 segmenti (variante di Makarios)
(IB) Assioma d'identità per l'intermedietà
(IP) Assioma interno di Pasch
(Lo$_2$) Assioma 2-dimensionale inferiore
(Up$_2$) Assioma 2-dimensionale superiore
(Eu) Assioma euclideo
(Co) Assioma di continuità

6 Lemmi basilari dimostrati da Makarios

Le dimostrazioni che seguono impiegano solo i primi sei assiomi di CE_2', vale a dire (TE), (IE), (SC), (FS′), (IB) e (IP), che individuano quella che Makarios chiama la *geometria (tarskiana) assoluta priva di dimensione, senza assioma di continuità.*

Lemma 1 (Riflessività debole dell'equidistanza) $ab \equiv ab$

Dim. (Sottinteso: le variabili a, b dell'asserto sono da considerarsi universalmente quantificate; nel corso della dimostrazione utilizzeremo questi stessi due nomi per generici punti). I passi-chiave di una dimostrazione formale sono questi:

1. $a \; \mathsf{ext}(a, a, a, b) \equiv a \; b$ (SC)

2. $\therefore \; ab \equiv ab$ (TE)

Il primo passo ci dà un esempio di come si '*istanzino*' variabili universalmente quantificate (qui le variabili q, a, b, c dell'assioma citato), sostituendole con dei termini. Traspare l'aspetto booleano della logica almeno due volte—ma in modo sotterraneo, dato che qui vediamo la traccia di una dimostrazione formale e non una derivazione particolareggiata—: dapprima, quando tralasciamo uno dei due congiunti dell'assioma (SC); poi quando, dopo aver istanziato le variabili p, q, r, s dell'assioma (TE), utilizziamo due volte quanto ricavato al passo precedente e utilizziamo la regola *Modus Ponens*. Il contrassegno $\therefore$ (leggi 'pertanto') segnala che il passo non risulta direttamente da un assioma, né è un'ipotesi di partenza, né la citazione di un lemma già noto, né un'assunzione o definizione provvisoria: risulta, invece, dall'impiego di passi precedenti della dimostrazione. $\dashv$

Lemma 2 (Simmetria dell'equidistanza) $ab \equiv cd \;\rightarrow\; cd \equiv ab$

Dim. I passi-chiave di una dimostrazione formale sono riportati sotto. Va da sé che a fine-dimostrazione vada adoperato il principio di deduzione, onde 'scaricare' l'ipotesi di partenza.

1. $a \, b \equiv c \, d$ (*Ipotesi*)

2. $a \, b \equiv a \, b$ (*Lemma* 1)

3. $\therefore \; cd \equiv ab$ (TE)

$\dashv$

Lemma 3 (Non-strettezza dell'intermedietà) $B \, a \, b \, b$

Dim.

1. $B\ a\ b\ \mathsf{ext}(a,b,a,a)\ \&\ b\ \mathsf{ext}(a,b,a,a) \equiv a\ a$ (SC)

2. $\therefore\ b = \mathsf{ext}(a,b,a,a)$ (IE)

3. $\therefore\ B\ a\ b\ b$ (=)

L'ultimo passaggio di questa dimostrazione sfrutta la proprietà di congruenza dell'=, che conferisce a questa relazione logica qualcosa in piú di una comune relazione di equivalenza. $\dashv$

Lemma 4 (Simmetria dell'intermedietà) $B\,a\,b\,c\ \rightarrow\ B\,c\,b\,a$

Dim.

1. $B\ a\ b\ c$ (*Ipotesi*)

2. $B\ b\ c\ c$ (*Lemma* 3)

3. $\therefore\ B\ b\ \mathsf{ip}(a,b,c,b,c)\ b\ \&\ B\ c\ \mathsf{ip}(a,b,c,b,c)\ a$ (IP)

4. $\therefore\ b = \mathsf{ip}(a,b,c,b,c)$ (IB)

5. $\therefore\ B\ c\ b\ a$ (=)

$\dashv$

Lemma 5 (Riflessività dell'equidistanza) $a\,b\ \equiv\ b\,a$

Dim.

1. $B\ b\ a\ \mathsf{ext}(b,a,b,a)\ \&\ a\ \mathsf{ext}(b,a,b,a) \equiv b\ a$ (SC)

2. $x = \mathsf{ext}(b,a,b,a)$ (*Definizione* locale)

3. $\therefore\ B\ b\ a\ x\ \&\ a\ x \equiv b\ a$ (=)

4. $x = a$ (*Assunzione*)

   4.1. $\therefore\ a\ a \equiv b\ a$ (=)

   4.2. $\therefore\ b\ a \equiv a\ a$ (*Lemma* 2)

   4.3. $\therefore\ b = a$ (IE)

4.4. $\therefore\ a\,b \equiv b\,a$ $(=)$

5. $x \neq a$ ($\mathit{Assunzione}$ opposta)

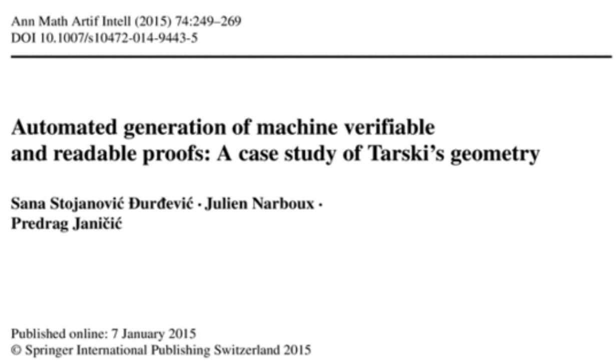
6. $\therefore\ B\,x\,a\,b$ (Lemma 4)

7. $x\,a \equiv x\,a\ \&\ a\,b \equiv a\,b\ \&\ a\,a \equiv a\,a$ (Lemma 1)

8. $\therefore\ a\,b \equiv b\,a$ (FS′)

$\dashv$

A questo punto, per stabilire che le teorie assiomatiche CE_2' e CE_2 sono di pari forza (i.e., hanno gli stessi teoremi), basta osservare che gli enunciati (FS) ed (FS′) risultano logicamente equivalenti tra loro: ciò grazie alla riflessività dell'equidistanza (che in CE_2' abbiamo laboriosamente finito di dimostrare, ma che in CE_2 è un assioma) e grazie anche a (TE). I dettagli vengono lasciati come esercizio.


Ann Math Artif Intell (2015) 74:249–269
DOI 10.1007/s10472-014-9443-5

Automated generation of machine verifiable and readable proofs: A case study of Tarski's geometry

Sana Stojanović Đurđević · Julien Narboux · Predrag Janičić

Published online: 7 January 2015
© Springer International Publishing Switzerland 2015

Figura 2: Ma la tecnologia della dimostrazione sta evolvendo...

7 Esercizi

Esercizio 1 *Skolemizzare la versione* (OP) *dell'enunciato di Pasch.*

Esercizio 2 *Ricavare la simmetria* (SB) *dell'intermedietà dalla versione esterna,* (OP)*, dell'enunciato di Pasch—usando anche gli assiomi* (SC)*,* (IB) *e* (IE)*.*

Riferimenti bibliografici

[Beeson and Wos(2014)] Michael Beeson and Larry Wos. OTTER proofs in Tarskian geometry. In Stéphane Demri, Deepak Kapur, and Christoph Weidenbach, editors, *7th International Joint Conference, IJCAR 2014, Held as Part of the Vienna Summer of Logic, Vienna, Austria, July 19-22, 2014, Proceedings*, volume 8562 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 495–510. Springer, 2014.

[Hintikka(1969)] Jaakko Hintikka, editor. *The philosophy of mathematics.* Oxford readings in Philosophy. Oxford University Press, 1969.

[Makarios(2013)] Timothy J. M. Makarios. A further simplification of Tarksi's axioms of geometry. *Note di Matematica*, 33(2):123–132, 2013.

[Schwabhäuser et al.(1983)Schwabhäuser, Szmielew, and Tarski] W. Schwabhäuser, W. Szmielew, and A. Tarski. *Metamathematische Methoden in der Geometrie*. Hochschultext. Springer Berlin Heidelberg, 1983. ISBN 9783540129585. URL `https://books.google.it/books?id=Qwx2QgAACAAJ`. A new forward in 2011 by Michael Beeson, Professor in the Math Department of San Jose State University, explains in lay terms the origins and differences between Euclidean and non-Euclidean geometries.

[Tarski(1948)] Alfred Tarski. A decision method for elementary algebra and geometry. Technical Report R-109, RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1948. Prepared for publication with the assistance of J.C.C. McKinsey. Revised 1951, 2$^{\text{nd}}$ edition 1957.

[Tarski(1959)] Alfred Tarski. What is elementary geometry? In Leon Henkin, Patrick Suppes, and Alfred Tarski, editors, *The axiomatic method, with special reference to geometry and physics*, pages 16–29. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.
(Ristampato in [Hintikka(1969), pp. 164–176]).

[Tarski(1967)] Alfred Tarski. *The completeness of elementary algebra and geometry.* Institut Blaise Pascal, Paris, 1967. iv+50 pp.

[Tarski and Givant(1999)] Alfred Tarski and Steven Givant. Tarski's system of geometry. *Bulletin of Symbolic Logic*, 5(2):175–214, 1999. URL `http://www.math.ucla.edu/~asl/bsl/0502/0502-002.ps`.

8 Svolgimento degli esercizi

Soluzione Es. 1.

$$B\,apc\,\&\,B\,qcb \quad\rightarrow\quad B\;a\;\mathsf{op}(\,a\,,\,p\,,\,c\,,\,q\,,\,b\,)\;q\;\&\;B\;p\;\mathsf{op}(\,a\,,\,p\,,\,c\,,\,q\,,\,b\,)\;b \qquad (\mathrm{OP}^{\mathsf{sk}})$$

$\dashv$

Soluzione Es. 2. **(Lucrezia Bottegoni)** Dimostro che: $B\,a\,b\,c \;\rightarrow\; B\,c\,b\,a$.

1. $B\;a\;b\;c$ $\qquad$ (*Ipotesi*)
2. $B\;a\;b\;b$ $\qquad$ (*Lemma* 3)
3. $\therefore\;\exists\,x\big(B\;a\;x\;a\;\&\;B\;c\;b\;x\big)$ $\qquad$ (OP)
4. $\therefore\;B\;a\;x_0\;a\;\&\;B\;c\;b\;x_0$ $\qquad$ (eliminaz. $\exists$)
5. $\therefore\;a = x_0$ $\qquad$ (IB)
6. $\therefore\;B\;c\;b\;a$ $\qquad$ (=)

$\dashv$