COGNOME .... Nome ....

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 2

11 febbraio 2026

Esercizio 1. Si considerino, nel piano affine reale $\mathbb{A}^2 := \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ col sistema di riferimento $(O; x, y)$, la retta r e il punto P dati da

$$r:\ x - 3y + 1 = 0, \quad P = (2, 3).$$

Determinare:

a) la retta r' passante per P e parallela a r;

b) il fascio $\mathcal{F}_P$ di rette di centro P, utilizzando r' come uno dei generatori;

c) un'affinità $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}^2)$ tale che $f(r) = r'$ (esprimendo tale f in forma matriciale).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3 := \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ col sistema di riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y, z)$, si considerino il piano π e i punti $A, B \in \pi$, dove

$$\pi:\ x - y + z = 0, \quad A = (1, 1, 0), \quad B = (-1, -3, 2).$$

Determinare:

a) l'equazione PARAMETRICA della retta r passante per A e B;

b) l'equazione CARTESIANA del piano σ ortogonale a π e passante per r;

c) il piano-asse τ del segmento AB (cioè il luogo dei punti equidistanti da A e B);

d) l'equazione PARAMETRICA della retta $t = \sigma \cap \tau$;

*e**) il punto medio M del segmento AB, verificando che $M \in t$.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{A}^3$ (con riferimento $(O; x, y, z)$) immerso in $\mathbb{P}^3$, dotato di coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, in modo che $\mathbb{P}^3 = \mathbb{A}^3 \cup \{x_0 = 0\}$ e si considerino i piani

$$\pi_1:\ x + y - 3 = 0, \quad \pi_2:\ x - 2z + 1 = 0.$$

Determinare:

a) le equazioni delle chiusure proiettive $\overline{\pi}_1$ e $\overline{\pi}_2$ dei piani dati;

b) le equazioni cartesiane E parametriche delle rispettive rette improprie r_1 e r_2;

c) il punto $P = r_1 \cap r_2$;

*d**) tutte le rette di $\mathbb{P}^3$ aventi P come unico punto improprio.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche bitangenti alla retta r in P e alla retta s in Q, dove

$$r:\ x + 2y - 5 = 0, \quad P = (1, 2)$$

$$s:\ x + 2y + 5 = 0, \quad Q = (-1, -2).$$

a) Determinare le coniche degeneri di $\mathcal{F}$, scrivendone l'equazione;

b) scrivere l'equazione di $\mathcal{F}$ utilizzando come generatori le sue coniche degeneri;

*c**) provare che tutte le coniche non degeneri di $\mathcal{F}$ sono a centro e determinare tale centro;

*d**) determinare le circonferenze di $\mathcal{F}$.

Le domande contrassegnate con l'asterisco sono leggermente meno facili delle altre e sono da considerarsi facoltative per la sufficienza.