COGNOME .... Nome ....

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 2

14 gennaio 2026

Esercizio 1. Nel piano affine reale $\mathbb{A}^2 := \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ col sistema di riferimento $(O; x, y)$, si considerino i punti

$$A_1 = (0,0), \quad A_2 = (1,0), \quad A_3 = (0,1), \quad B_1 = (2,-1), \quad B_2 = (3,0), \quad B_3 = (4,2).$$

a) Provare che esiste una ed una sola affinità $f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ tale che $f(A_i) = B_i$, per $i = 1,2,3$;

b) determinare tale affinità f, fornendo la sua equazione matriciale (del tipo $Y = f(X) = MX + C$);

*c**) determinare l'equazione parametrica della retta $f(r)$, immagine della retta r passante per l'origine e per il punto $P = (2,2)$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3 := \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ col sistema di riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y, z)$, siano dati la retta r e il punto P, dove

$$r : \ (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(2, 3, 1), \quad P = (2, -1, 2).$$

Determinare:

a) l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di sostegno r;

b) l'equazione cartesiana del piano $\pi \in \mathcal{F}_r$ passante per P;

c) l'equazione parametrica della retta t contenuta in π, passante per P e ortogonale a r;

*d**) il punto P_0 proiezione ortogonale di P su r.

Esercizio 3. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$, dotato di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si consideri la retta r passante per i punti

$$A = [1, 0, 1, 1], \quad B = [1, 2, -1, 0].$$

Determinare:

a) l'equazione PARAMETRICA di r;

b) l'equazione CARTESIANA di r;

c) il punto improprio R_∞ di r;

*d**) l'equazione CARTESIANA del piano π passante per r e per il punto (improprio) $P_\infty = [0, 1, 1, 1]$.

Esercizio 4. Si considerino le coniche di $\mathbb{A}^2$:

$$\mathcal{C} \ : \ x^2 - 2y = 0, \quad \mathcal{D} \ : \ x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Determinare:

a) le due rette tangenti $T_O(\mathcal{C})$ e $T_O(\mathcal{D})$ alle coniche in $O = (0,0)$;

b) l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche generato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$;

c) le coniche degeneri di $\mathcal{F}$:

*d**) i punti base di $\mathcal{F}$ e la classificazione di $\mathcal{F}$.

Le domande contrassegnate con l'asterisco sono leggermente meno facili delle altre e sono da considerarsi facoltative per la sufficienza.