# Regressione lineare con i dati *Orange Juice*

a.a. 25-26

Si considerino i dati, raccolti nel 1990, relativi alle vendite di succo d'arancia (OJ) della catena di alimentari Dominick di Chicago (fonte: Taddy M, Business Data science, Mc Graw Hill, 2019). Il dataset include i costi (`prices`) e le vendite (`sales`) settimanali per tre brand di OJ denominati Tropicana, Minute Maid e Dominick's (`brand`), venduti in 83 punti vendita; la variabile `feat` è una variabile *dummy* che presenta il valore 1 se il prodotto è stato pubblicizzato nella settimana in cui sono state registrate le vendite (mediante flyer o in negozio), 0 altrimenti.

```
oj <- read.csv("oj.csv")
head(oj)
```

```
##   sales price     brand feat
## 1  8256  3.87 tropicana    0
## 2  6144  3.87 tropicana    0
## 3  3840  3.87 tropicana    0
## 4  8000  3.87 tropicana    0
## 5  8896  3.87 tropicana    0
## 6  7168  3.87 tropicana    0
```

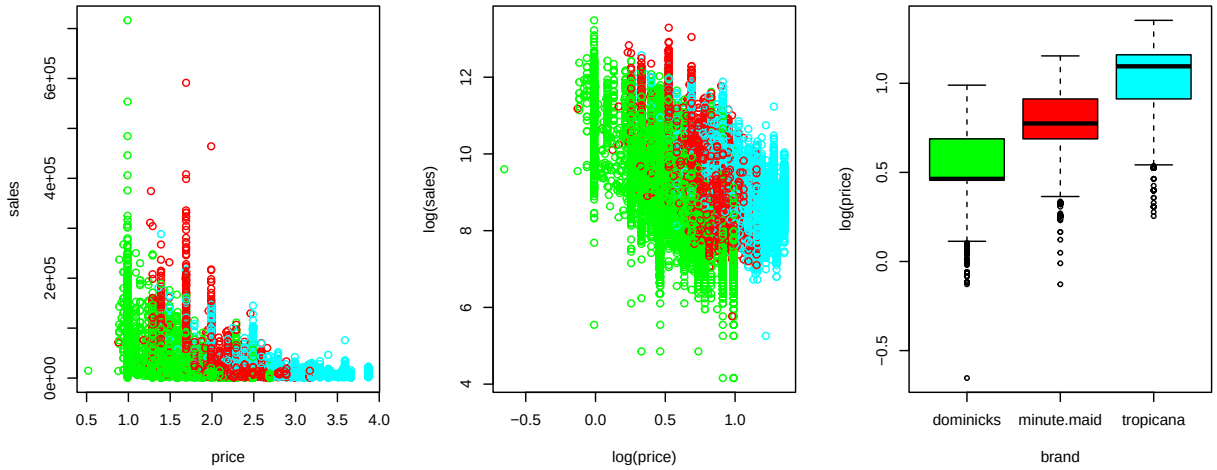
Una volta letti i dati, codifichiamo il brand e la variabile `feat` come variabili categoriali:

```
oj$brand<-as.factor(oj$brand)
levels(oj$brand)
```

```
## [1] "dominicks"   "minute.maid" "tropicana"
```

```
oj$feat<-as.factor(oj$feat)
```

```
bcol <- c("green","red","cyan")
par(mfrow=c(1,3))
plot(sales ~ price, data=oj, col=bcol[oj$brand])
plot(log(sales) ~ log(price), data=oj, col=bcol[oj$brand])
plot(log(price) ~ brand, data=oj, col=bcol)
```




Osserviamo che il modello lineare può essere adottato anche quando la linearità delle relazioni tra la variabile risposta e le esplicative è presente tra opportune trasformazioni delle stesse.

Ad esempio, se si adotta la trasformazione data dal logaritmo naturale per la variabile risposta il modello diventa *log-lineare*:

$$\log(Y) = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon$$

In tal caso l'interpretazione della stima $\hat{\beta}_2$ è che un incremento unitario di $X$ produce in media una variazione di $\hat{\beta}_2$ unità su $\log(Y)$.

In termini di $Y$ (la variabile non trasformata), si ha un effetto *moltiplicativo*: ogni incremento di una unità di $X$ porta ad un valore medio della variabile risposta pari a $ye^{\beta_2}$. Infatti se $x$ diventa $x+1$, allora $Y' = e^{\beta_1+\beta_2(x+1)} = e^{\beta_1+\beta_2 x}e^{\beta 2} = Ye^{\beta_2}$.

In questo caso, grafici mostrano che sia ragionevole considerare una trasformazione logaritmica per entrambe le variabili continue `price` e `sales`.

Si considera quindi un modello *log-log* della forma

$$\log(Y) = \beta_1 + \beta_2 \log(X) + \varepsilon$$

In questo caso l'interpretazione della stima $\hat{\beta}_2$ è quella della variazione percentuale su $Y$ per un incremento dell'1% di $X$ (il valore atteso del rapporto $y'/y$ per un incremento di $x$ dell'1% è $(1.01)^{\beta_2} \approx 1 + 0.01\beta_2$).

Stimiamo quindi innanzitutto un modello di regressione lineare semplice utilizzando `log(sales)` come variabile risposta e `log(price)` come esplicativa:

$$\log(\text{sales}) = \beta_1 + \beta_2 \log(\text{price}) + \varepsilon$$

```
m1 <- lm(log(sales) ~ log(price), data=oj)
summary(m1) # coef, tests, fit
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(sales) ~ log(price), data = oj)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
```

```
## -5.0441 -0.5853 -0.0330  0.5756  3.7264
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 10.42342    0.01535  679.04   <2e-16 ***
## log(price)  -1.60131    0.01836  -87.22   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9071 on 28945 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2081, Adjusted R-squared:  0.2081
## F-statistic:  7608 on 1 and 28945 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Le stime dei coefficienti sono $\hat{\beta}_1 \approx 10.42$ e $\hat{\beta}_2 \approx -1.60$

```
coef(m1)
```

```
## (Intercept)  log(price)
##   10.423422   -1.601307
```

e indicano che, indipendentemente dal brand, log(sales) diminuisce all'aumentare di log(prices). In particolare, un incremento dell'1% di `prices` porta a moltiplicare y=sales di un fattore pari a $e^{\hat{\beta}_2 \log(1.01)} = e^{-1.6 \log(1.01)} = 0.9842$, da cui si deduce che ad un aumento dell'1% di `prices` corrisponde ad una diminuzione delle vendite pari all'1.58%.

Per introdurre l'effetto del brand sull'intercetta del modello si può stimare un modello che include `brand` come variabile esplicativa. Ciò equivale a ritenere che, a parità di prezzo, il valore atteso delle vendite sarà diverso a seconda del brand:

```
m2 <- lm(log(sales) ~ log(price) + brand, data=oj)
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(sales) ~ log(price) + brand, data = oj)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -5.3152 -0.5246 -0.0502  0.4929  3.5088
##
## Coefficients:
##                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)       10.82882    0.01453  745.04   <2e-16 ***
## log(price)        -3.13869    0.02293 -136.89   <2e-16 ***
## brandminute.maid   0.87017    0.01293   67.32   <2e-16 ***
## brandtropicana     1.52994    0.01631   93.81   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.7935 on 28943 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3941, Adjusted R-squared:  0.394
## F-statistic:  6275 on 3 and 28943 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Dal modello si ottiene $\hat{\beta}_2 = -3.14$, pertanto le vendite calano di circa il 3% per ogni incremento dell'1% del prezzo. In secondo luogo, si osservi che il modello restituisce la stima di due coefficienti per i brand `Minute Maid` e `Tropicana`, ma non per il terzo brand. Ciò è dovuto al fatto che, essendo `brand` una variabile con tre modalità, vengono create due variabili indicatrici $z_i$ (`brandminute.maid`) e $w_i$ (`brandtropicana`) tali che,

per $i = 1, \ldots, n$,

$$z_i = \begin{cases} 1, & \texttt{brand} = \texttt{Minute Maid} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$w_i = \begin{cases} 1, & \texttt{brand} = \texttt{Tropicana} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per tre modalità, sono sufficienti due variabili indicatrici. Infatti, quando $z_i = w_i = 0$, allora `brand=Dominick's`.

Quanto detto può essere facilmente verificato ottenendo la matrice $(n \times p)$ di regressione o *design matrix* del modello, $\mathbf{X}$, le cui colonne sono un vettore di dimensione $n$ con tutti elementi pari a 1 e i vettori delle $p-1$ esplicative incluse nel modello (nella notazione matriciale, $y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$).

```
x <- model.matrix( ~ log(price) + brand, data=oj)
head(x)
```

```
##   (Intercept) log(price) brandminute.maid brandtropicana
## 1           1   1.353255                0              1
## 2           1   1.353255                0              1
## 3           1   1.353255                0              1
## 4           1   1.353255                0              1
## 5           1   1.353255                0              1
## 6           1   1.353255                0              1
```

Il modello ha quindi la forma

$$\log(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \log(x_i) + \beta_3 \, z_i + \beta_4 \, w_i + \varepsilon_i$$

I coefficienti che vengono riportati nella sintesi del modello relativi alla variabile `brand` sono quindi da interpretare in relazione alla categoria di riferimento, qui data dal brand `Dominick's`, che appare per primo digitando il comando

```
levels(oj$brand)
```

```
## [1] "dominicks"   "minute.maid" "tropicana"
```

Dalle stime sotto riportate, si deduce che, a parità di prezzo, il brand Tropicana realizza vendite maggiori di Minute Maid, che a sua volta ha in media vendite superiori al brand Dominick's. Si ricordi che il coefficiente di una variabile dummy rappresenta la differenza tra il valore medio della variabile risposta quando la variabile dummy vale 1 e quando vale 0.

```
coef(m2)
```

```
##      (Intercept)       log(price) brandminute.maid   brandtropicana
##       10.8288216       -3.1386914        0.8701747        1.5299428
```

Per il brand `Dominick's` si ha

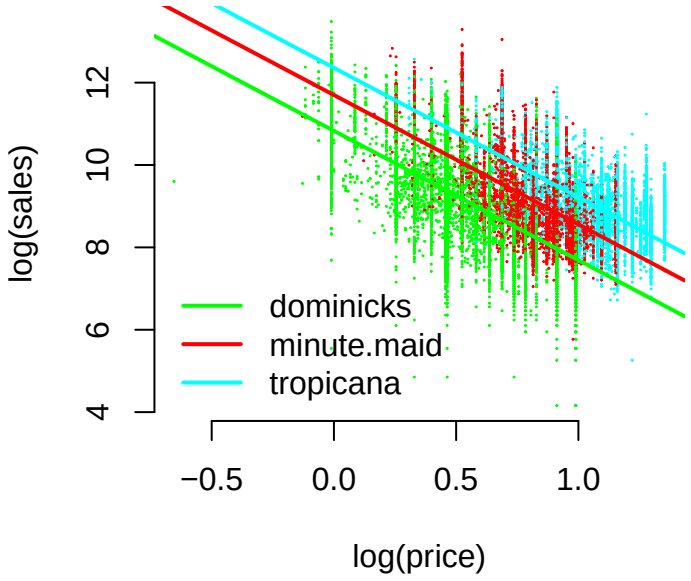
$$E(\log(Y)|x) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \log(x);$$

per il brand `Minute Maid` si ha

$$E(\log(Y)|x) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_2 \log(x).$$

Si evince quindi che $\hat{\beta}_3$ è la differenza tra la stima della media di log(sales) per `minute.maid` e quella per `dominick's`:

```
betav<-coef(m2)
plot(log(sales) ~ log(price), data=oj, col=bcol[oj$brand],
     cex=.1, pch=20, bty="n")
abline(a=betav[1], b=betav[2], col=bcol[1], lwd=2)
abline(a=betav[1]+betav[3], b=betav[2], col=bcol[2], lwd=2)
abline(a=betav[1]+betav[4], b=betav[2], col=bcol[3], lwd=2)
legend("bottomleft", bty="n", lwd=2, col=bcol, legend=levels(oj$brand))
```




```
newdata<-data.frame(price=rep(4,3),
                    brand=factor(c("tropicana","minute.maid","dominicks"),
                    levels=levels(oj$brand)))
predict(m2, newdata=newdata)  ## predicted log units moved
```

```
##        1        2        3
## 8.007614 7.347846 6.477671
```

```
exp(predict(m2, newdata=newdata)) ## predicted # of units moved
```

```
##         1         2         3
## 3003.7420 1552.8481  650.4545
```

Sebbene il modello $m_2$ consenta di ottenere una intercetta diversa per ogni brand, esso assume che la pendenza della retta sia la stessa nei tre casi; un modello più realistico potrebbe essere ottenuto includendo l'interazione tra `log(price)` e `brand`, che consente di verificare se il brand ha effetto sulla relazione tra il prezzo e le vendite:

$$\log(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i' + \beta_3\, z_i + \beta_4\, w_i + \beta_5\, x_i'\, z_i + \beta_6\, x_i'\, w_i + \varepsilon_i$$

dove dove $x_i' = \log(x_i)$.

```r
## Modello con Interazioni
m3 <- lm(log(sales) ~ log(price)*brand, data=oj)
summary(m3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(sales) ~ log(price) * brand, data = oj)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -5.4434 -0.5232 -0.0494  0.4884  3.4901
##
## Coefficients:
##                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                  10.95468    0.02070 529.136   <2e-16 ***
## log(price)                   -3.37753    0.03619 -93.322   <2e-16 ***
## brandminute.maid              0.88825    0.04155  21.376   <2e-16 ***
## brandtropicana                0.96239    0.04645  20.719   <2e-16 ***
## log(price):brandminute.maid   0.05679    0.05729   0.991    0.322
## log(price):brandtropicana     0.66576    0.05352  12.439   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.7911 on 28941 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3978, Adjusted R-squared:  0.3977
## F-statistic:  3823 on 5 and 28941 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Nel modello $m_3$, per ogni brand si ottiene una retta con intercetta e coefficiente angolare differente.

Come prima, la modalità di riferimento per il brand è Dominick's: per ogni incremento dell'1% del prezzo, la diminuzione percentuale attesa delle vendite del brand Tropicana è

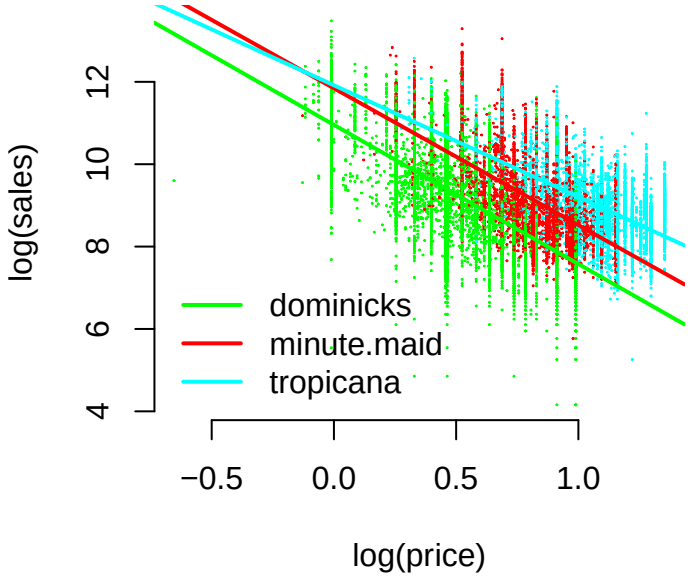
`log(price)+log(price):brandtropicana`$= -3.37753 + 0.66576 = -2.71$

ed è minore rispetto a quella di Minute maid, pari a

`log(price)+log(price):brandminute.maid`$= -3.37753 + 0.05679 = -3.32$

e di Dominick's, pari a `log(price)`$= -3.38$.

```r
betav<-coef(m3)
plot(log(sales) ~ log(price), data=oj, col=bcol[oj$brand], cex=.1, pch=20, bty="n")
abline(a=betav[1], b=betav[2], col=bcol[1], lwd=2)
abline(a=betav[1]+betav[3], b=betav[2]+betav[5], col=bcol[2], lwd=2)
abline(a=betav[1]+betav[4], b=betav[2]+betav[6], col=bcol[3], lwd=2)
legend("bottomleft", bty="n", lwd=2, col=bcol, legend=levels(oj$brand))
```




Infine, è ragionevole supporre che la pubblicità di un prodotto influenzi le vendite, per cui stimiamo un modello che tenga conto della variabile `feat`:

$$\log(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i' + \beta_3\, z_i + \beta_4\, w_i + \beta_5\, x_i' z_i + \beta_6\, x_i' w_i + \beta_7 \delta_i + \varepsilon_i$$

dove $x_i' = \log(x_i)$ e $\delta_i = 1$ se `feat=1` e 0 altrimenti.

```
levels(oj$feat)<-c("no", "si")
m4 <- lm(log(sales) ~ log(price)*brand + feat, data=oj)
summary(m4)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(sales) ~ log(price) * brand + feat, data = oj)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.9524 -0.4408 -0.0036  0.4231  3.2363
##
## Coefficients:
##                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                  10.46852    0.01932 541.843  < 2e-16 ***
## log(price)                   -2.89261    0.03279 -88.227  < 2e-16 ***
## brandminute.maid              0.51271    0.03734  13.732  < 2e-16 ***
## brandtropicana                0.62865    0.04163  15.100  < 2e-16 ***
## featsi                        0.89728    0.01043  86.029  < 2e-16 ***
## log(price):brandminute.maid  0.33426    0.05123   6.525 6.92e-11 ***
## log(price):brandtropicana    0.82914    0.04780  17.346  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
##
## Residual standard error: 0.706 on 28940 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5204, Adjusted R-squared:  0.5203
## F-statistic:  5234 on 6 and 28940 DF,  p-value: < 2.2e-16
```