Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026
Esercizi - preparazione alla prova scritta

Prof. Valentina Beorchia

26 maggio 2026

1. Si consideri la curva regolare $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$.

   (a) Si calcoli la lunghezza d'arco di γ a partire da $t = 0$.

   (b) Si calcolino il vettore normale e la curvatura di γ in ogni suo punto.

   (Ricordo che: $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ e $\cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t)$)

2. Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con $\beta(t) = (t\sqrt{2} + \cos t, \sqrt{3}\sin t, t - \sqrt{2}\cos t)$. Verificare che $\beta(t)$ è una curva regolare priva di flessi e calcolarne curvatura e torsione, verificando in particolare che sono entrambe costanti e non nulle. Trovare un'elica della forma $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ isometrica a $\beta(t)$ e descrivere un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ che trasforma $\beta(t)$ in $\alpha(t)$.

3. Sia $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$.

   (a) Si calcolino la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet di α in ogni punto della curva.

   (b) Dimostrare che $\alpha(\mathbb{R})$ è una circonferenza e se ne individuino il centro, il raggio ed il piano in cui è contenuta.

   (c) Sia $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da $\beta(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Si individui un movimento rigido $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\alpha(t) = T \circ \beta(t)$ per ogni t.

4. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco. Definiamo per ogni t la retta normale ad α in $\alpha(t)$ come la retta passante per $\alpha(t)$ e avente direzione $n(t)$. Dimostrare che se tutte le rette normali alla curva passano per un punto fissato P allora $\alpha(I)$ è contenuto in una circonferenza.

5. Sia $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco tale che $\|\alpha(t)\| \leq \|\alpha(t_0)\| = R$ in un intorno di $t_0 \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $k(t_0) \geq 1/R$, dove $k(t_0)$ è la curvatura di α in t_0.

   (Suggerimento: Si consideri la funzione $f(t) = \|\alpha(t)\|^2$ che, per ipotesi, ha in t_0 un massimo locale, e si usi il criterio della derivata seconda $f''(t_0)$.)

6. Sia α una curva regolare parametrizzata per lunghezza d'arco. Si considerino $T(s), k(s)$ e $\tau(s)$ rispettivamente tangente, curvatura e torsione di α. Se $k_1(s)$ è la cuvatura della curva $T(s)$, si dimostri per ogni s la seguente formula:

$$k_1^2(s) = \frac{k^2(s) + \tau^2(s)}{k^2(s)}.$$

7. Sia $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata lunghezza d'arco. Si dimostri che per ogni s vale che

$$\langle \sigma^{'''}(s), \sigma^{'}(s) \rangle = -\|\sigma^{''}(s)\|^2.$$

8. Sia $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da $\alpha(t) = (t^2, -2t, \sin t)$.
   (a) Calcolare la curvatura, la torsione ed il circolo osculatore ad α nel punto $\alpha(0)$.
   (b) Dare una rappresentazione parametrica di S, la sviluppabile delle tangenti di α.
   (c) Detta g la generatrice di S passante per $\alpha(0)$, verificare che il piano tangente ad S nei punti di g (escludendone uno in cui il piano tangente non è definito) è costante.
   (d) Vale la stessa proprietà anche per le altre generatrici?

9. Si consideri la sfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $f : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ con $f(u, \varphi) = \frac{1}{\cosh u}(\cos\varphi, \sin\varphi, \sinh u)$.
   (a) Assumendo che S^2 è una superficie regolare, si dimostri che f è una parametrizzazione locale.
   (b) Calcolare i coefficienti della I forma fondamentale rispetto a f.
   (c) Dimostrare che f mantiene gli angoli fra le curve, cioè che se abbiamo $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ e $\beta : (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ due curve differenziali tali che $\alpha(0) = \beta(0)$, allora l'angolo formato da α e β in $\alpha(0)$ è lo stesso che quello formato dalle curve $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$ in $f(\alpha(0))$.

   (Si ricordano le seguenti formule: $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, $\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ e $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$)

10. Detta S la sfera in $\mathbb{R}^3$ di centro l'origine e raggio 1. Si consideri la curva ottenuta intersecando S con il piano individuato dall'equazione $x = y$ e se ne dia una parametrizzazione α. (Suggerimento: si può utilizzare la parametrizzazione della sfera $\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$.)

    Si calcolino curvatura e torsione di questa curva. Verificare inoltre che per ogni punto della curva il vettore $\alpha''(t)$ risulta ortogonale al piano tangente alla sfera in $\alpha(t)$.

11. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y)\}$ dove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è una funzione differenziabile. Si dimostri che S è una superficie minima se e solo se

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

12. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ una superficie regolare parametrizzata da $\varphi(u, v)$. Si supponga che i coefficienti della prima forma fondamentale E ed F siano costanti e si dimostri che le curve $u \to \varphi(u, v_0)$ con v_0 fissato sono geodetiche.