Lezione 25 marzo 2026

mercoledì 11 settembre 2024 15:11

(A1) ∃ una DISTANZA su S insieme

cioè: $d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

ⓐ $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall \; P, Q \in S$

e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

ⓑ $d(P,Q) = d(Q,P)$

ⓒ diseg. triangolare

$$d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$$

(A2) Per 2 punti distinti passa

1! retta. (1° post. di Euclide)

(A3) ∃ almeno 3 punti non allineati

(A4) Su ogni retta ∃ 2 relaz. d'ordine, fra loro opposte, t.c.

se $A < B < C$, allora

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \qquad (*)$$

Viceversa, se $(*)$ vale, allora B è allineato con A e C.

A5 $\overset{r \text{ retta orientata}}{u \subseteq r}$, u semiretta di orig. O

$\forall\ x \in \mathbb{R}_{>0}$ $(x > 0)$, $\exists!\ P \in u$

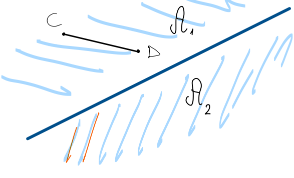
t.c. $\overline{OP} = x$

(c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti di u e $\mathbb{R}_{>0}$)

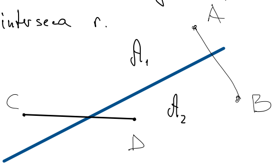
A6 Data r retta, l'insieme complementare è suddiviso in 2 regioni disgiunte : **SEMIPIANI**

con le proprietà:

① il segmento che congiunge 2 punti in uno stesso semipiano non interseca r



② il segmento che cong. 2 punti in semipiani distinti interseca r.



TRASFORMAZIONI DEL PIANO EUCLIDEO E^2

Def.: Una ISOMETRIA o CONGRUENZA di E^2 è un'applicazione (funzione) suriettiva

$$f: E^2 \to E^2$$

che CONSERVA LE DISTANZE, cioè

$\forall P,Q \in E^2$, $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$

$$\overline{f(P)f(Q)} = \overline{PQ}$$

PROPRIETÀ:

① Un'isometria trasforma un cerchio (circonferenza) in un cerchio e anche un disco (cerchio) è trasformato in un disco

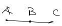
② f è iniettiva; è suriettiva
ipotesi ⇒ è biiettiva

③ la applicazione inversa $f^{-1}: E^2 \to E^2$

è anche essa un'isometria

④ un'isometria trasforma una retta una retta:

cons. 3 punti allineati A, B, C



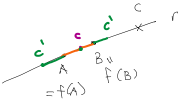
(A4) $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$

$$\begin{aligned} &\qquad \| \\ &d(f(A), f(C)) = d(f(A), \underline{f(B)}) + d(\underline{f(B)}, f(C)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sono allineati

Ripetendo l'argomento $\forall$ terna di punti di una retta r, otteniamo che tutte le terne immagine sono allineate e giacciono tutte sulla stessa retta immagine.

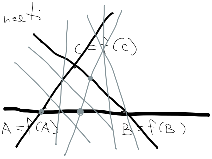
Esercizi: ① Se f isometria che fissa 2 punti di una retta



$\Rightarrow$ f fissa tutti i punti della retta: $\forall\, c \in r,\ f(c) = c$

Soluzione: cons. 3 casi, $A < C < B$,
$C < A$, $C > B$

② f isometria che fissa 3 punti non allineati

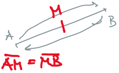


$\Rightarrow$ $f = Id_{E^2}$ (f fissa tutti i punti)

③ f isometria che scambia due punti tra di loro: $f(A) = B$
$f(B) = A$

$\Longrightarrow$ $\exists$ un punto fisso per f: cioè

M t.c. $f(M) = M$.



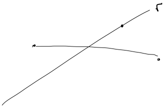
SIMMETRIA ASSIALE

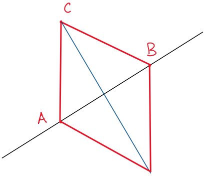
Def: Data retta $r \subseteq E^2$, si dice SIMMETRIA ASSIALE di asse r

un' isometria $f : E^2 \longrightarrow E^2$ t.c.

① f lascia fissi tutti i punti di r,

e porta ciascun semipiano nel semipiano opposto.





② f è INVOLUTORIA, cioè

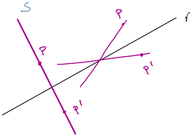
$$f^2 = f \circ f = Id_{E^2}$$

Def. Una retta s si dice PERPENDICOLARE

o ORTOGONALE ad r se $r \neq s$

e s è mandata in se stessa: per ogni $P \in s$, $f(P) \in s$

da una simmetria assiale di asse r.



$S \subseteq E^2$, $f(S) :=$ insieme di
tutte le im. dei

punti di S

$f : A \to B, \qquad C \subseteq A$

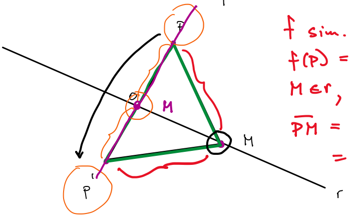
$f(C) = \{ f(c) : c \in C \}$

esiste ed unica la

ⓐ A7 Data r retta, $\boxed{\exists !}$ simmetria assiale di asse r.

PROBLEMA:

Punto di minima distanza punto - retta:



f sim. di asse r

$f(P) = P'$

$M \in r, \ \underline{\Rightarrow f(M) = M}$

$\overline{PM} = f(P)\,f(M)$

$= P'M$

Sia P' il simmetrico di P

$\overset{\frac{1}{2}\overline{PP'}}{\overline{PM}} + \overset{\frac{1}{2}\overline{PP'}}{\underline{\overline{MP'}}} \geq \overline{PP'}$ ∀ scelta di $M \neq O$

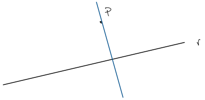
DISEG. TRIANG.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{PP'}$ è il minimo

$\boxed{2\,\overline{PM} \geq \overline{PP'}}$

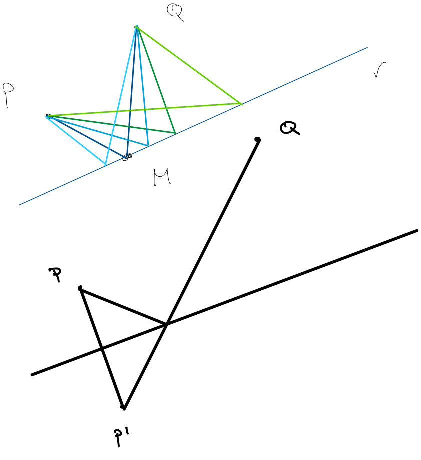
$\boxed{\overline{PM} \geq \frac{1}{2}\overline{PP'}}$ $\forall\, M \in r$

A8 Data retta r e un punto $P \in \mathbb{E}^2$, $\exists!$ retta s perpendicolare ad r e passante per P.



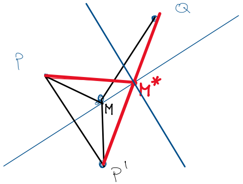
PROBLEMA DI ERONE:

Data r retta e P, Q nello stesso semipiano, trovare il percorso più breve che congiunge P con Q toccando r.



Cioè: cerco $M \in r$ t.c.

$\overline{PM} + \overline{MQ}$ sia minima.



Cons. simmetria assiale di asse r

S_r : $S_r(P) = P'$

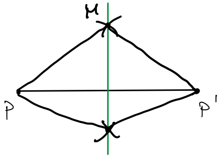
$\overline{PM} = \overline{P'M}$

$\Rightarrow$ minimizzare $\overline{PM} + \overline{MQ}$ equivale a

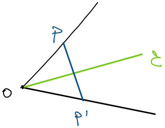
minimizzare $\overline{P'M} + \overline{MQ}$

Per la disuguaglianza triangolare, il minimo è realizzato da M^*, punto di intersezione tra r e la retta $P'Q$; siccome P' e Q giacciono su semipiani diversi, il punto M^* c'è per l'assioma Ⓐ6.

Def.: • Possiamo definire ASSE DI UN SEGMENTO



è l'ASSE DELL'UNICA SIMMETRIA che SCAMBIA P con P'



- BISETTRICE DI UN ANGOLO:

  asse di simmetria della simmetria assiale che scambia tra loro le due semirette lati dell'angolo

$\boxed{\overline{OP} = \overline{OP'}}$; sia ε l'asse dell'unica simmetria che scambia P con P' ; $O \in \varepsilon$, perché ε è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da P e P'

Tale simmetria scambia P e P', fissa O

⇒ scambia fra loro le 2 semirette

Esercizio:

se due rette r e s sono perpendicolari a una stessa retta t, allora sono parallele (cioè coincidenti o senza punti di intersezione)

SIMMETRIE CENTRALI

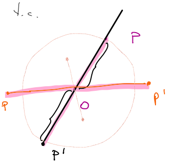
Fissiamo $O \in E^2$; $\forall P \neq O$,

cons. PO e sulla retta per P e O

cons. il punto $P' \neq P$ t.c.

$d(O,P) = d(O,P')$

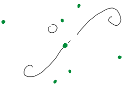
$\overline{OP} = \overline{OP'}$



$f : E^2 \to E^2$

$f(O) := O$,

$\forall P \neq O$, $f(P) := P'$,

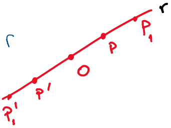


oss: f è un' isometria e ha un unico punto fisso: O

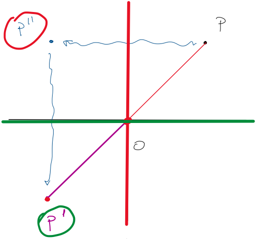
CENTRO.

Oss.: $f^2 = Id$, cioè f è un' involuzione

oss.: se $r \ni O$, $f(r) = r$

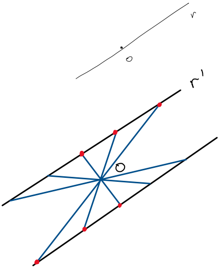


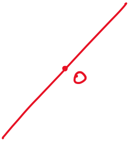
Teorema: Ogni simmetria centrale di centro O è composizione di 2 simmetrie assiali, i cui assi sono 2 rette qualsiasi passanti per O e e perpendicolari tra loro.



CONSEGUENZA

PROP.: Una simmetria centrale trasforma una qualunque retta r in una retta parallela ad r





Infatti: sia $r' = f(r)$

se $P \in r' \cap r$

se $P = O \Rightarrow r' = r$

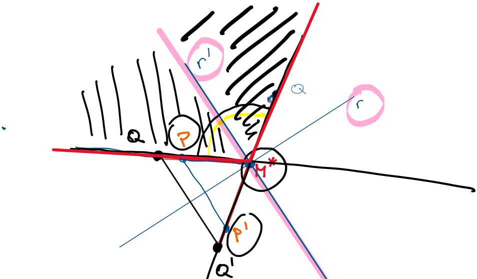
se $P \neq O \Rightarrow P' = f(P) \in f(r') \cap f(r)$

$= f(f(r)) \cap f(r)$

$= r \cap r'$

$\Rightarrow$ r e r' hanno almeno 2 punti in comune $\Rightarrow r = r'$.

RIPRENDIAMO PROBLEMA DI ERONE:



Cons. SIMM. CENTRALE f DI centro M^*

si scrive come comp. di 2 simmetrie assiali

$$f = S_r \circ S_{r'}$$

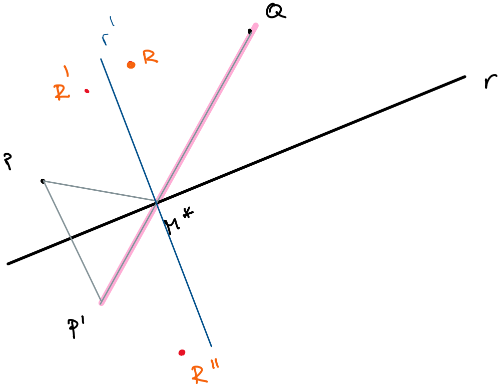
$$\boxed{S_r \circ f} = \underbrace{(S_r \circ S_r)}_{= Id} \circ S_{r'} = \boxed{S_{r'}}$$

porta le semirette M^*Q nelle semirette M^*P

Poichè: $S_r \circ S_r = Id$

$\Longrightarrow$ $\underbrace{S_{r'} \text{ porta semirette } M^*Q \text{ in } M^*P}$

$\Longrightarrow$ gli angoli che M^*Q e M^*P formano con r' sono simmetrici

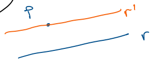


⟹ la legge di RIFLESSIONE DI UN RAGGIO LUMINOSO che va da P a Q dopo essere stato riflesso da un piano soddisfa la legge del MINIMO CAMMINO di Erone. (OTTICA GEOMETRICA)

~ ~ ~

ULTIMO ASSIOMA

(A8) Data r retta, $P \notin r$, $\exists!\ r' \ni P$ parallela ad r.



Esercizio: Delle lettere in stampatello dell'alfabeto italiano, quali hanno

- 1 asse simmetria
- 2 assi simmetrie
- 1 centro di simmetria

N

B 1 asse

C 1

D 1

E 1

K 1

M 1

F

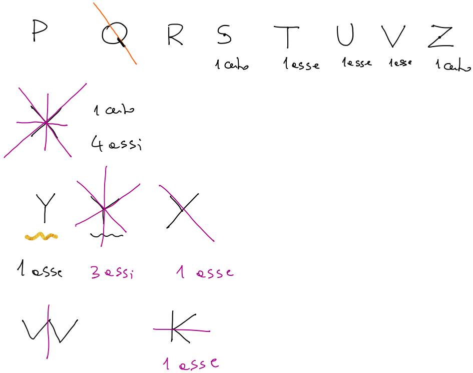
G

H 2 assi
1 centro

+ 2 assi
1 centro

N 1 centro

O infiniti assi
e 1 centro



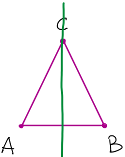
APPLICAZIONE della Teoria delle Simmetrie

- È possibile fare una classif. di triangoli e quadrilateri in base alle loro proprietà simmetriche:

cioè ci poniamo il seguente

PROBLEMA: Come deve essere un triangolo per essere trasformato in se stesso da una simmetria assiale?

OSS. I 3 vertici devono essere mandati nei 3 vertici, i lati devono essere mandati in lati, e l'interno nell'interno (usare proprietà delle isometrie)



Abbiamo solo 2 possibilità per le immagini dei 3 vertici (a meno di rinominarli)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Infatti: una simmetria assiale è involutoria

⇒ un vertice può rimanere fisso, oppure c'è uno scambio fra 2 vertici

Se i 3 vertici sono fissi ⇒ l'unica isometria è l'identità

Se C è fissato, e A e B sono scambiati

⇒ asse della simmetria passa per C, A e B sono simmetrici ⇒ l'asse di simmetria è l'asse del segmento AB

$$\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{f(A)\,f(C)}$$

perché $f(A) = B$
$f(C) = C$

Chiameremo questi triangoli **ISOSCELI.**