Una sfera ha curvatura gaussiana costante positiva. Che cosa avviene se una superficie compatta connessa di R^3 possiede curvatura gaussiana ovunque positiva ma non necessariamente costante? Un esempio di superficie con queste proprietà è l'ellissoide di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1 \quad a,b,c>0$$

(cfr. esempio 35.9(8)). La classe di queste superfici è molto ristretta, se ci si limita a considerare quelle orientabili.

36.4 TEOREMA *Sia $S \subset \mathsf{R}^3$ una superficie compatta connessa orientabile avente curvatura gaussiana ovunque positiva. Allora S è diffeomorfa a $\mathbf{S}^2$.*

Dimostrazione. Fissata un'orientazione di S possiamo supporre assegnato un campo differenziabile di versori normali $\mathbf{N}$ su S. A $\mathbf{N}$ è associata un'applicazione di Gauss:

$$\gamma : S \to \mathbf{S}^2$$

$$\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}).$$

Poiché $K(\mathbf{x}) = \det(\gamma_*(\mathbf{x})) > 0$ il differenziale di γ è ovunque non degenere e quindi γ è un diffeomorfismo locale. Poiché S è compatta, γ è anche suriettiva perché è aperta (teorema 24.5(b)). Quindi γ è un rivestimento di $\mathbf{S}^2$. Ma S è connessa e $\mathbf{S}^2$ è semplicemente connessa, e quindi γ è un omeomorfismo (corollario 18.7). Si conclude che γ è un diffeomorfismo (proposizione 24.4). ∎

Il teorema seguente pone un vincolo importante alla curvatura gaussiana di una superficie compatta.

36.5 TEOREMA *Sia S una superficie differenziabile compatta di R^3. Esiste almeno un punto $\mathbf{p} \in S$ tale che $K(\mathbf{p}) > 0$.*

Dimostrazione. Sia

$$\Phi : S \to \mathsf{R}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}.$$

Poiché S è compatta e Φ è differenziabile, in particolare continua, Φ assume un massimo in un punto $\mathbf{p} \in S$. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to S$ una curva differenziabile tale che $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$, e sia $\alpha'(t_0) = \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(S)$. La funzione

$$\Phi \cdot \alpha = \alpha \bullet \alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$$

è differenziabile e possiede un massimo assoluto in t_0; quindi:

$$\frac{\mathrm{d}(\Phi\cdot\alpha)}{\mathrm{d}t}(t_0)=0, \quad \frac{\mathrm{d}^2(\Phi\cdot\alpha)}{\mathrm{d}t^2}(t_0)\le 0. \qquad [36.2]$$

Esplicitando la prima di queste due relazioni si trova:

$$2\alpha'(t_0)\bullet\alpha(t_0) = 2\mathbf{v}\bullet\mathbf{p} = 0.$$

Quest'uguaglianza significa che $\mathbf{v}$ è perpendicolare a $\mathbf{p}$ e quindi che $\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ è un versore normale a S in $\mathbf{p}$, perché $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(S)$ può essere un vettore tangente qualsiasi. Supponiamo ora che α sia un sezione normale di S in $\mathbf{p}$; la seconda delle [36.2] dà:

$$2\alpha'(t_0)\bullet\alpha'(t_0)+2\alpha''(t_0)\bullet\alpha(t_0) = 2\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}+2\alpha''(t_0)\bullet\mathbf{p} =$$

$$= 2+2\alpha''(t_0)\bullet\mathbf{p}\le 0$$

e quindi, per il teorema 35.3:

$$|\kappa(\mathbf{v})| = |\kappa(\alpha)(t_0)| = \left|\alpha''(t_0)\bullet\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}\right| \ge \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \qquad [36.3]$$

dove $\kappa(\mathbf{v})$ è la curvatura normale di S nella direzione $\langle\mathbf{v}\rangle$ calcolata rispetto al versore normale $\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$. Poiché questa disuguaglianza è valida per tutti i $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^1_{\mathbf{x}}$, le curvature normali sono diverse da 0 e quindi $K(\mathbf{p}) > 0$. ∎

Dal teorema 36.5 discende immediatamente il seguente corollario:

36.6 COROLLARIO *In R^3 non esistono superfici differenziabili compatte tali che $K(\mathbf{x}) \le 0$ per ogni $\mathbf{x} \in S$.*

Ovviamente la compattezza di S è essenziale perché la conclusione del corollario sia vera. Si pensi ad esempio alla pseudosfera, che ha curvatura costante -1, ma non è compatta (cfr. esempio 35.9(5)). Abbiamo anche il seguente risultato:

36.7 COROLLARIO *In R^3 non esistono superfici minime (cioè tali che $H \equiv 0$) compatte.*

Dimostrazione. Se in un punto $\mathbf{p} \in S$ si ha $H(\mathbf{p}) = 0$, allora $K(\mathbf{p}) \le 0$. ∎

37 Il Theorema Egregium

Nel paragrafo 35 abbiamo introdotto l'operatore forma L in un punto di una superficie elementare S e l'abbiamo applicato allo studio della geometria locale di S. L è definito per mezzo del campo di versori normali alla superficie, e