Lezione 26 maggio 2026

mercoledì 1 settembre 2021 16:24

Ricordiamo il V° POSTULATO DI EUCLIDE (~ 300 a.C.), nella forma equivalente di PLAYFAIR (1795)

- PER UN PUNTO ESTERNO A UNA RETTA PASSA UNA E UNA SOLA RETTA PARALLELA ALLA RETTA DATA.

La questione dell'indipendenza del V° postulato dai primi quattro portò a chiedersi se esistessero delle geometrie in cui fossero validi i primi quattro postulati, ma NON il quinto.

POSSIBILI VARIANTI:

- PER UN PUNTO ESTERNO A UNA RETTA PASSA PIÙ DI UNA RETTA PARALLELA ALLA RETTA DATA.

⇝ GEOMETRIA IPERBOLICA
(LOBACHEVSKIJ 1826, BOLYAI)

- PER UN PUNTO ESTERNO A UNA RETTA NON PASSA ALCUNA RETTA PARALLELA ALLA RETTA DATA

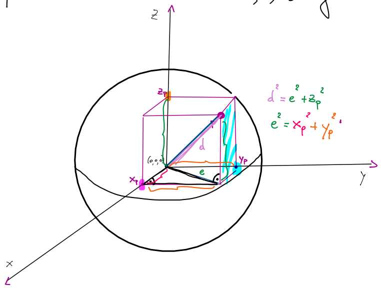
⇝ GEOMETRIA SFERICA
(RIEMANN 1854)

CON IMPORTANTI APPLICAZIONI alla NAVIGAZIONE e alla ASTRONOMIA.

∼ · ∼ · ∼ · ∼

Spazio reale
3-dim

Cons. la SFERA $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ di CENTRO $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e raggio 1; S^2 si può vedere come luogo dei punti dello spazio con distanza da (0,0,0) uguale a 1:



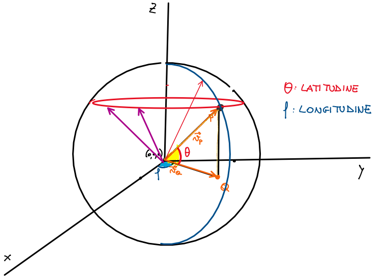
La distanza euclidea $d = d(P,(0,0,0))$ nello spazio $\mathbb{R}^3$ verifica

$$d^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2$$

Quindi: S^2 è il luogo dei punti di coordinate (x,y,z) che verificano

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 1.}$$

PARAMETRIZZAZIONE di S^2 con COORDINATE SFERICHE:



Le curve con $\theta = \text{cost}$ si chiamano PARALLELI

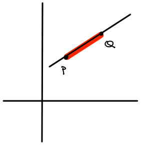
Le curve con $\varphi = \text{cost}$ si chiamano MERIDIANI

Al variare di $\theta \in [-\pi/2, \pi/2] = [-90°, 90°]$ e $\varphi \in [0, 2\pi] = [0, 360°]$, la terna $\underbrace{(\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta)}$ determina tutti i punti di S^2.

(x_P, y_P, z_P)

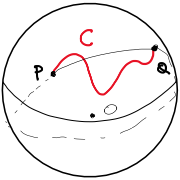
DOMANDA: quali curve su S^2 giocano il ruolo delle rette nel piano?

SCELTA PIÙ NATURALE: le rette in $\mathbb{R}^2$ hanno la proprietà:



$\overline{PQ}$ è la curva piana che collega P a Q di MINIMA LUNGHEZZA

Analogamente: Se $P, Q \in S^2$, e C è una curva che collega P e Q, possiamo definire la lunghezza di C?



Dobbiamo considerare una PARAMETRIZZAZIONE di C:

- $\alpha : [a,b] \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e supp. $x(t), y(t), z(t)$ funzioni derivabili

  tale che $\alpha(a) = (x_P, y_P, z_P)$

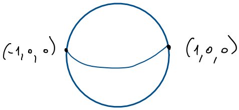
  e $\alpha(b) = (x_Q, y_Q, z_Q)$

e tale che $\alpha([a,b]) = C$.

Esempio: $\alpha : [0, \pi] \longrightarrow S^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

L'immagine è una curva su S^2 che collega $\alpha(0) = (1,0,0) = P$

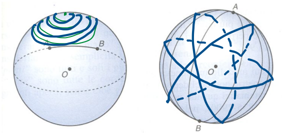
con $\alpha(\pi) = (-1, 0, 0)$

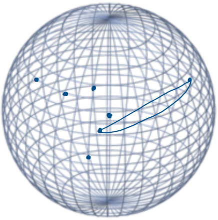


Def. La LUNGHEZZA di α è

$$\boxed{\ell(\alpha) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ dt}$$

TEOREMA: Le curve di lunghezza minima su S^2 che collegano due punti sono archi di CERCHI MASSIMI.





$\Rightarrow$ nozione di DISTANZA SFERICA o ORTODROMIA

È la traiettoria percorsa dagli aeromobili e navi, poiché implica un minor consumo di carburante e di tempo.

L'angolo che sottende questa distanza viene chiamato DISTANZA ANGOLARE.

FORMULA PER LA DISTANZA : $P, Q \in S^2$

θ_P, φ_P ; θ_Q, φ_Q

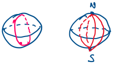
$$\boxed{d(P,Q) = \arccos\left(\cos(\varphi_Q - \varphi_P) \cdot \cos\theta_P \cdot \cos\theta_Q + \sin\theta_P \cos\theta_Q\right)}$$

In coordinate cartesiane : $P = (x_P, y_P, z_P)$, $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

$$\boxed{d(P,Q) = \arccos\left(x_P x_Q + y_P y_Q + z_P z_Q\right)}$$

CON QUESTA SCELTA, quali assiomi soddisfa la geometria sferica?

I° Per due punti distinti passa una e una sola retta;



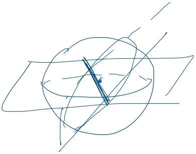
NO

II° Ogni retta si può prolungare indefinitamente;

III° Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio con centro il punto e raggio uguale alla lunghezza;

IV° Tutti gli angoli retti sono congruenti SÌ

V° ?



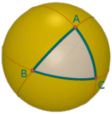
EQUAZIONI DEI CERCHI DI RAGGIO MASSIMO:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ \underline{ax+by}\,\underline{+cz=0} \end{cases}$$

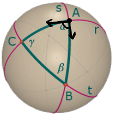
eq. del generico piano passante per (0,0,0)

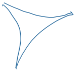
TRIANGOLI SFERICI

Sia T un triangolo : $T \subseteq S^2$ di vertici A, B, C:



È possibile definire gli ANGOLI AI VERTICI:





LABORATORIO
SFERE DI LENART

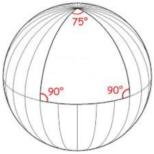
Una CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI GAUSS-BONNET:

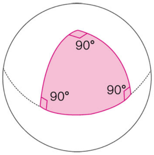
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_T K \, d\sigma$$

integrale di superficie su T

con K : CURVATURA DI GAUSS

(vale ∀ triangolo geodetico su una superficie differenziale regolare)





Per la sfera si ha che K è costante e uguale 1 (in generale, una sfera di raggio r ha curvatura costante $= \frac{1}{r^2}$)

⇒ su una sfera, la somma degli angoli interni in un triangolo è sempre > π.

OSS.: Un modello per la geometria IPERBOLICA è dato dalla PSEUDOSFERA, che è una superficie di curvatura costante NEGATIVA : $K = -1$. Dal Teorema di Gauss -

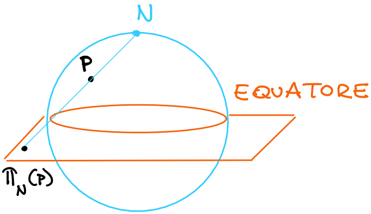
Bonnet si ha che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre $< \pi$.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

Fissiamo $N = (0,0,1)$ POLO NORD, e cons.

$$\pi_N : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \{z=0\}, \quad \pi_N(P) = \overline{NP} \cap \{z=0\}$$

Se $P = (x_0, y_0, z_0)$, la retta $\overline{NP}$ ha eq.



$$\begin{cases} x = t x_0 \\ y = t y_0 \\ z = 1 + t(z_0 - 1) \end{cases}$$

eq. parametriche

e intersecando con $z=0$ troviamo

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{x_0}{1-z_0} \\ y = \dfrac{y_0}{1-z_0} \\ z = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\pi_N(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{x_0}{1-z_0}, \frac{y_0}{1-z_0}, 0\right)}$$

π_N è una MAPPA CONFORME, cioè mantiene gli angoli, ed è molto usata in NAUTICA.

ESERCIZIO: ① Giustificare il fatto che $\forall P, Q \in S^2$, $\exists$ un cerchio massimo passante per P e Q

② Trovare le immagini dei paralleli e dei meridiani tramite π_N e determinare la loro natura come enti geometrici piani.

Fare uno schizzo