Esercizi di riepilogo

Esercizio 1 Sia

$$f(x,y) = \frac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2}$$

per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Per $\alpha = 1/2, 2, 3$ stabilire se nell'origine f è continua, se ammette derivate parziali e se è differenziabile.

Esercizio 2 Per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione $f(x,y) = |x|^\alpha |y|^\alpha$ è differenziabile nell'origine?

Esercizio 3 Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = (x^2+y)e^{y-x^2} + z^6 - \alpha z^2$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4 Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = xye^{\alpha x - y} + e^{\alpha z^2}$$

per ogni $\alpha \neq 0$.

Esercizio 5 Determinare i punti dell'insieme

$$E := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1\}$$

che hanno distanza massima e minima dall'origine.
Suggerimento: cercare gli estremi della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ vincolati ad E.

Esercizio 6 Stabilire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n! \log(1 + n^{-n})$$

converge.

Esercizio 7 Stabilire per quali valori di $x \geq 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^{1/3}}$$

converge.

Esercizio 8 Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\} \log(n+4)$$

converge.

Esercizio 9 Determinare il raggio di convergenza R della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n-4}$$

e stabilire se la serie converge per $x = \pm R$.

Esercizio 10 Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x} - x}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - x}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}.$$

Esercizio 11 Studiare la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x^{3\alpha})(\log(x))^\alpha}{\sqrt{x-1}} dx$$

.

Suggerimento: Ricordare l'equivalenza asintotica $\arctan(t) \sim t$ per $t \to 0$.