

Termodinamica Atmosferica

Francesco Sioni

Anno accademico 2025/26

Basato principalmente su:

- Wallace, J. M., & Hobbs, P. V. (2006). Atmospheric science: an introductory survey (Vol. 92). Elsevier.
- Markowski, P., & Richardson, Y. (2011). Mesoscale meteorology in midlatitudes. John Wiley & Sons.

1 Termodinamica secca e umida

1.1 Legge dei gas e temperatura virtuale

La legge dei gas perfetti (derivata dalla Legge di Boyle e le due leggi di Charles) prevede che:

$$pV = nR^*T \quad (1)$$

dove $R^*=8.3145JK^{-1}mol^{-1}$ è la costante universale dei gas.

I gas per essere ideali devono rispettare le seguenti caratteristiche:

1. si comportano allo stesso modo, indipendentemente dalla loro natura chimica
2. il volume degli atomi/molecole è trascurabile rispetto al volume del recipiente che le contiene (gli atomi/molecole sono considerate puntiformi)
3. gli atomi non interagiscono tra di loro e gli urti con il recipiente sono elastici: l'energia cinetica totale è conservata
4. il movimento delle molecole è continuo e casuale

Un gas è tanto più vicino all'essere ideale quanto la pressione è bassa e la temperatura è alta.

La conversione da moli (n) a massa tramite la massa molare (MM) prevede:

$$n = \frac{m}{MM} \quad (2)$$

Occupiamoci dell'aria secca, vogliamo scrivere un'equazione di stato.

$$p_i = \frac{R^*T}{V} n_i \quad \rightarrow \quad p_d = \sum_i p_i = \frac{R^*T}{V} \sum_i n_i = \frac{R^*T}{V} n_d \quad (3)$$

$$\rho_d = \frac{1}{V} \sum_i m_i = \frac{1}{V} \sum_i n_i MM_i = \frac{n_d}{V} \sum_i x_i MM_i = \frac{n_d}{V} MM_d \quad (4)$$

$$MM_d = \sum_i x_i MM_i \quad (5)$$

con $x_i = \frac{n_i}{n_{tot}}$ frazione molare.

Per aria secca $x(N_2)=0.78$, $x(O_2)=0.209$, $x(Ar)=0.00934$ con $MM(N_2)=28g/mol$, $MM(O_2)=32g/mol$, $MM(Ar)=40g/mol$ allora $MM_d=28.97g/mol$.

$$p_d = \frac{R^*T}{V} \frac{\rho_d V}{MM_d} = \rho_d R_d T \quad (6)$$

La legge dei gas può essere scritta per tutti i gas singolarmente come per il vapore acqueo. Ricordando che R^* è la costante dei gas per una mole di ogni sostanza, per adattarla a 1 kg di una sostanza dividiamo per MM e moltiplichiamo per 1000.

$$p = \rho R T \quad (7)$$

$$R = 1000 \frac{R^*}{MM} \rightarrow \left[\frac{J}{mol K} \right] = \left[\frac{J}{1kg MM K} \right] \quad (8)$$

R è quindi la costante del gas che dipende dalla sua composizione.

Per l'aria secca: $R_d = 1000 \frac{R^*}{MM_d} = 287.05 J kg^{-1} K^{-1}$.

Assumiamo lo stesso volume V costituito in parte da massa m_d e in parte con da m_v allora ho $\rho = \frac{m_d+m_v}{V} = \rho_d + \rho_v$

$$e = \rho_v R_v T \quad (9)$$

con $R_v = 1000 \frac{R^*}{MM_w} = 461.51 J kg^{-1} K^{-1}$

$$\varepsilon = \frac{R_d}{R_v} = 0.622 \quad (10)$$

$$\rho = \rho_d + \rho_v = \frac{p - e}{R_d T} + \frac{e}{R_v T} \quad (11)$$

$$\rho = \frac{p}{R_d T} \left[1 - \frac{e}{p} (1 - \varepsilon) \right] = \frac{p}{R_d T_v} \quad (12)$$

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{e}{p} (1 - \varepsilon)} \quad (13)$$

$$p = \rho R_d T_v \quad (14)$$

La **temperatura virtuale** è la temperatura che l'aria secca avrebbe se la sua pressione e densità fossero le stesse dell'aria umida. Il denominatore è sempre < 0 quindi $T_v \leq T$. Mantengo la forma dell'equazione dei gas senza dover sapere le frazioni molari e la composizione, mi basta sapere e (pressione di vapore).

1.2 Prima legge della termodinamica

Si consideri un sistema chiuso. Oltre all'energia cinetica e potenziale *macroscopica* il sistema ha anche un'energia *interna microscopica* dovuta all'energia potenziale (relativa posizione delle particelle) e cinetica (moto delle particelle) delle particelle che lo compongono. Supponendo le proprietà macroscopiche del sistema invariate allora vale il primo principio della termodinamica:

$$du = \delta q - \delta w \rightarrow u_2 - u_1 = q - w \quad (15)$$

con q calore dato al sistema e w lavoro.

Il cambiamento nell'energia interna du dipende solo dagli stati iniziali e finali del sistema ed è indipendente dal modo in cui il sistema è passato da uno stato all'altro. Pensando a un cilindro su cui si applica una forza F , facilmente si deriva che $\delta W = F dx = pA dx = p dV$ da cui

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \rightarrow \delta W = p dv \quad (16)$$

con $v = 1/\rho$ unità di volume. Permane la convenzione $W > 0$ la sostanza fa lavoro sull'ambiente, $W < 0$ l'ambiente fa lavoro sulla sostanza. Si ottiene così la forma del primo principio della termodinamica

$$du = \delta q - p dv \quad (17)$$

Si prenda ora un materiale e gli si fornisca una certa quantità di calore q per farlo passare da T a $T+dT$. Il rapporto $\partial q/\partial T$ è definito **calore specifico** del materiale. A seconda di come viene trasferito questo calore possiamo avere calori specifici diversi. Se si mantiene il volume costante allora abbiamo **il calore specifico a volume costante** c_v . Ricordando Eq.17 e che per un gas ideale la legge di Joule prevede che l'energia interna dipenda solo dalla temperatura, non dal volume.

$$c_v = \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v = \frac{du}{dT} \text{ per gas ideale} \quad (18)$$

$$dq = c_v dT + p dv \quad (19)$$

Posso invece mantenere pressione costante in tal caso ottengo **il calore specifico a pressione costante** c_p

$$c_p = \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_p \quad (20)$$

$$dq = c_v dT + d(pv) - v dp = c_v dT + R dT - v dp = (c_v + R) dT - v dp \quad (21)$$

ma per pressioni costanti $dp=0$

$$dq = (c_v + R) dT \quad (22)$$

$$c_p = \left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_p = (c_v + R) \rightarrow c_p = c_v + R \quad (23)$$

ottengo una nuova forma del primo principio della termodinamica

$$dq = c_p dT - v dp \quad (24)$$

solo per i gas ideali per aria secca si ha $c_v = 717 J kg^{-1} K^{-1}$ e $c_p = 1004 J kg^{-1} K^{-1}$.

Per i gas monoatomici vale infatti $c_p/c_v = 5/3$, per quelli biatomici (l'aria secca in maggior parte) $c_p/c_v = 7/5$.

1.3 Vapore acqueo in atmosfera

La presenza del vapore acqueo in atmosfera (**umidità**) può essere definita attraverso varie quantità e grandezze in fisica dell'atmosfera.

Mixing ratio/rapporto di mescolanza [g/kg] o anche [kg/kg] = massa di vapore in kg di aria secca. $r \approx 1 - 20g/kg$. È conservata se non ci sono passaggi di stato.

$$r = \frac{m_v}{m_d} \quad (25)$$

$$r = \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p-e}{R_d T}} = \varepsilon \frac{e}{p-e} \simeq \varepsilon \frac{e}{p} \quad (26)$$

- r si conserva per parcel non sature che si muovono senza mescolarsi nell'ambiente
- non è affetto da riscaldamento, raffreddamento, differenze di pressione
- può essere definita equivalentemente anche per la parte liquida (q_l) e di ghiaccio (q_i) presenti in atmosfera

Umidità specifica [g/kg] o anche [kg/kg] = massa di vapore in kg di aria. Valori simili a r.

$$q = \frac{m_v}{m_d + m_v} = \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{m_v}{m_d} \left(\frac{1}{1 + m_v/m_d} \right) = \frac{r}{1 + r} \quad (27)$$

- r si conserva per parcel non sature che si muovono senza mescolarsi nell'ambiente
- non è affetto da riscaldamento, raffreddamento, differenze di pressione

Ricaviamo ora T_v in funzione di questa quantità

$$\begin{aligned} p &= p_d + e = \rho_d R_d T + \rho_v R_v T = \\ &= \rho T \left(\frac{\rho_d}{\rho} R_d + \frac{\rho_v}{\rho} R_v \right) = \rho T \left((1 - q) R_d + q R_v \right) \\ &= \rho T R_d \left(q \frac{R_v}{R_d} + 1 - q \right) = \rho T R_d \left(1 + q \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right) \approx \rho T R_d (1 + 0.61q) \end{aligned} \quad (28)$$

che comparando con Eq. 14 permette di ottenere

$$T_v = T(1 + 0.61q) \quad (29)$$

Umidità assoluta [kg/m³] è la concentrazione del vapore in aria

$$\rho_v = \frac{m_v}{V} = \frac{e}{R_v T} \quad (30)$$

- facile da misurare usando l'assorbimento dell'infrarosso, ultravioletto o radiazione a microonde (*LIDAR*, vedi lezione finale *Telerilevamento*)
- è affetta da riscaldamento, raffreddamento

Pressione di vapor saturo [hPa] - VEDI SLIDE.

Definisco anche il **Mixing ratio di saturazione** [g/kg] dove m_{vs} è la massa di vapore in un volume di aria che è satura rispetto a una superficie piana di acqua

$$r_s = \frac{m_{vs}}{m_d} \quad (31)$$

$$r_s = \varepsilon \frac{e_s}{p - e_s} \simeq \varepsilon \frac{e_s}{p} \quad (32)$$

$r_s(p, T)$ è una funzione solo della pressione e della temperatura.

Umidità Relativa [%] dove r e r_s devono essere alla stessa p e T

$$RH = 100 \frac{e}{e_s(T)} \quad (33)$$

la WMO ha raccomandato che l'umidità relativa sia definita in realtà come:

$$RH = 100 \frac{r}{r_s} = 100 \frac{\varepsilon \frac{e}{p - e}}{\varepsilon \frac{e_s}{p - e_s}} = 100 \frac{e}{e_s} \frac{p - e_s}{p - e} \neq 100 \frac{e}{e_s} \quad (34)$$

Le definizioni coincidono solo se $e = e_s$ cioè RH=0% e 100%.

- $0 \leq RH \leq 100$
- **rapporto tra il rate di condensazione del vapore acqueo (assumendo esista una superficie su cui può avvenire) e il rate di evaporazione dell'acqua (assumendo ci sia presenza di liquido che può evaporare) - VEDI SLIDE**
- se $RH > 100\%$: condizioni di **sovrassaturazione** = il rate di condensazione prevale (di solito non si supera l'1%)
- se $RH < 100\%$ = il rate di evaporazione prevale
- regola la massima evaporazione nell'aria
- grandezza più frequentemente usata per descrivere l'umidità
- facile da misurare attraverso variazioni di capacità in dielettrici, contrazione/espansione di fibre organiche

2 Moti verticali

2.1 Moti adiabatici

Una delle condizioni della Lifting Parcel Theory (LPT) è l'adiabaticità della parcel ($\delta q = 0$), considero per ora aria secca

$$\delta q = 0 = c_p dT - v dp = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp$$

divido per dz e uso il bilancio idrostatico

$$c_p \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{\rho} (-\rho g) \quad \rightarrow \quad -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} = \Gamma_d = 9.8 \text{ K km}^{-1} \quad (35)$$

con Γ_d che è il gradiente termico verticale adiabatico o *dry adiabatic lapse rate*. Ovvero una parcel in atmosfera che salga o scenda adiabaticamente si scalda o si raffredda con questo rate: il processo è detto **adiabatico secco**. Il lapse rate medio in atmosfera è $6-7 \text{ K km}^{-1}$. Come me lo spiego? Per capirlo devo prendere in considerazione, più tardi, il vapore.

Definiamo **temperatura potenziale** θ di una parcel di aria la temperatura che la parcel avrebbe se fosse portata adiabaticamente a un livello di pressione standard p_0 (di solito 1000 hPa). Cerchiamo di trovare un'espressione. Si riparta da prima:

$$c_p dT - v dp = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp = c_p dT - \frac{p}{R_d T} dp = 0$$

Si integri da p a p_0 e da T a θ

$$\begin{aligned} \frac{c_p}{R_d} \int_{\theta}^T \frac{dT}{T} &= \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} \\ \frac{c_p}{R_d} \ln \left(\frac{T}{\theta} \right) &= \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \\ \theta &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \end{aligned} \quad (36)$$

è l'equazione di Poisson. La temperatura potenziale è una quantità conservata per una parcel che si muove in atmosfera sotto condizioni adiabatiche. Per questo θ è molto utile.

2.2 Moti pseudoadiabatici

Abbiamo capito che se solleviamo sufficientemente una massa d'aria che contiene vapore allora si raffredderà adiabaticamente fino a raggiungere la saturazione ($r = r_s(T)$) e avremo una transizione di fase. A quel punto il rilascio di calore latente all'interno della parcel adiabatica determinerà un raffreddamento meno veloce. Se il prodotto di condensazione rimane all'interno possiamo ancora considerare il moto adiabatico (e reversibile) assumendo che il calore non esca dalla parcel. Avremo un processo **adiabatico saturo** (la massa totale di acqua=vapore +liquido si conserva).

Se invece il prodotto di condensazione esce subito dalla parcel il processo è irreversibile e non strettamente adiabatico, dato che i prodotti di condensazione portano con sé del calore (si scaldano o si raffreddano). Avremo un processo **pseudoadiabatico saturo**.

I due processi possono essere considerati simili dato che il calore portato con sé dai prodotti di condensazione è molto minore del calore portato dall'aria stessa.

Proviamo a trovare un'espressione per il lapse rate ricordando che quando la condensazione avviene c'è un rilascio di calore latente per unità di massa secondo $dq = -L_v r_s$ con L_v calore latente di vaporizzazione ovvero il calore necessario a convertire un'unità di massa di materiale da liquido a vapore senza aumentare la temperatura.

Ricordiamo Eq.24 ma sostituiamo con l'idrostatica

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} dp = v dp = -g dz \quad (37)$$

$$dq = c_p dT - v dp = c_p dT - v dp + g dz \quad (38)$$

Alla saturazione $dq = -L_v r_s$ quindi il I principio TD diventa

$$-L_v dr_s = c_p dT + g dz \quad (39)$$

Con $r_s \approx \varepsilon e_s(T)/p$ allora

$$dr_s = \frac{\partial r_s}{\partial T} dT + \frac{\partial r_s}{\partial p} dp$$

$$\frac{\partial r_s}{\partial p} = -\frac{r_s}{p}$$

Ricordo l'equazione di Clausius-Clapeyron (VEDI SLIDE)

$$\frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dT} = \frac{L_v}{R_v T^2} \rightarrow \frac{\partial r_s}{\partial T} = \frac{\varepsilon}{p} \frac{e_s L_v}{R_v T^2} = r_s \frac{L_v}{R_v T^2}$$

$$dr_s = r_s \frac{L_v}{R_v T^2} dT - \frac{r_s}{p} dp = r_s \frac{L_v}{R_v T^2} dT - \frac{r_s}{p} dp = r_s \frac{L_v}{R_v T^2} dT + \frac{r_s g}{R_d T} dz$$

$$c_p dT + g dz + L_v dr_s = c_p dT + g dz + L_v \left(r_s \frac{L_v}{R_v T^2} dT + \frac{r_s g}{R_d T} dz \right) = 0 \quad (40)$$

$$c_p dT \left[1 + r_s \frac{L_v^2}{c_p R_v T^2} \right] + g dz \left[1 + \frac{r_s L_v}{R_d T} \right] = 0 \quad (41)$$

$$\Gamma_s = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \left[\frac{1 + \frac{r_s L_v}{R_d T}}{1 + r_s \frac{L_v^2}{c_p R_v T^2}} \right]$$

A differenza di Γ_d , Γ_s non è costante (ricordiamo che r_s dipende da T). Si noti che $\Gamma_s < \Gamma_d$ con valore medio che oscilla da 4 a 6-7 K/km.

2.2.1 Foehn/Stau esercizietto

Supponiamo di avere una montagna di 1500 m e un flusso di aria umida che impinge su tale montagna: l'aria è costretta a sollevarsi. Partiamo da una parcel a $T_0^{init} = 15^\circ\text{C}$ e $\text{RH}=80\%$. Si solleva per 500 m seguendo Γ_d , quindi a 500 m avrò che $T_{500} = 10^\circ\text{C}$ e $\text{RH}=100\%$. A questo punto la parcel raggiunge la saturazione, in seguito continua a salire a $\Gamma_s \approx 5\text{C}/\text{km}$ allora avrò che in cima $T_{top}=5^\circ\text{C}$. Suppongo inoltre che tutto sia condensato ovvero $r=0$. A quel punto la discesa sarà adiabatica secca e arrivo a fondovalle con $T_0^{fin}=20^\circ\text{C} > T_0^{init}$. L'esercizio è molto sommario, per una derivazione più corretta si guardi l'esercizio effettuato con diagramma skewT-lnp (VEDI SLIDE).

2.2.2 Temperatura potenziale equivalente

Deriviamo un'espressione per la **temperatura potenziale equivalente**. Divido per T il primo principio

$$\frac{dq}{T} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{RT}{pT} dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Da θ

$$\ln \theta - \ln T = -\frac{R}{c_p} \ln p + \text{const.}$$

$$\frac{d\theta}{\theta} - \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \quad c_p \frac{d\theta}{\theta} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

ma $dq = -L_v r_s$. Confronto le equazioni sopra e ottengo

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{c_p} \frac{dq}{T} = -\frac{L_v}{c_p T} dr_s$$

assumendo $\frac{dT}{T} \ll \frac{dr_s}{r_s}$ (vedi esercizio W.H. 3.52) si può scrivere:

$$\frac{L_v}{c_p T} dr_s = d\left(\frac{L_v r_s}{c_p T}\right)$$

da cui

$$\frac{d\theta}{\theta} = -d\left(\frac{L_v r_s}{c_p T}\right)$$

che integrata da

$$-\frac{L_v r_s}{c_p T} = \ln \theta + \text{const.}$$

se assumiamo che per basse temperature $\frac{r_s}{T} \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \theta_e$

$$-\frac{L_v r_s}{c_p T} = \ln\left(\frac{\theta}{\theta_e}\right) \quad \rightarrow \quad \theta_e = \theta \exp\left(\frac{L_v r_s}{c_p T}\right) \quad (42)$$

si dice quindi che la Temperatura potenziale equivalente è la temperatura che la parcel avrebbe se fosse sollevata pseudoadiabaticamente fino a far condensare tutto il vapore contenuto nella parcel, rilasciando il calore latente. E che in seguito sia compressa adiabaticamente fino un livello di pressione standard p_0 (di solito 1000 hPa). Si può infatti notare che θ_e è uguale a θ quando tutto il vapore è condensato per cui $r_s = 0$.

θ_e è conservata sia in processi adiabatici saturi che secchi.

Si definisca anche la **temperatura potenziale equivalente di saturazione** θ_{es} di una parcel non satura come la temperatura potenziale equivalente che avrebbe se fosse satura. Sebbene θ_{es} dipenda dallo stato termodinamico dell'aria, non si conserva in moti *non saturi* in sollevamento o compressione. Per aria satura invece $\theta = \theta_{es}$. Se la temperatura in un layer diminuisce come la pseudoadiabatica satura allora θ_{es} è costante. θ_{es} dipende da T e p, è indipendente da r (si assume sia sempre a saturazione).

2.3 Conservazione del vapore acqueo

Si deriva qui una delle equazioni primitive dell'atmosfera che viene risolta dai modelli numerici.

Si consideri un volume d'aria umida e si vuole valutare la variazione del contenuto di vapore nel tempo. L'approccio è **euleriano**. Si prenda un volume unitario.

La massa d'acqua presente nel volume è $M = \rho q$ da cui

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} dV \quad (43)$$

La massa all'interno del volume può variare per l'avvezione del vapore attraverso la superficie o perchè ci sono all'interno del volume dei pozzi (condensazione) o delle sorgenti (evaporazione da liquido)

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} dV = - \iint_S (\rho q) \vec{v} \cdot \vec{n} dS + S - P \quad (44)$$

Utilizzando il teorema della divergenza ($\int_V (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial V} (F \cdot n) dS$)

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho q \vec{v}) + S - P \quad (45)$$

$$q \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho q (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla(\rho q) = +S - P \quad (46)$$

$$q \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho q (\nabla \cdot \vec{v}) + q \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \vec{v} \cdot \nabla q = +S - P \quad (47)$$

$$q \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \rho) \right] + \rho \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla q \right] = +S - P \quad (48)$$

Ma nella prima parentesi conservazione della massa mi porta il termine a zero

$$\rho \frac{dq}{dt} = +S - P \quad (49)$$

3 Stabilità

3.1 Stabilità atmosferica

Abbiamo parlato termodinamicamente di che cosa succede sollevando una parcel. Cerchiamo ora di capire cosa succede invece dal punto di vista dinamico e perchè una parcel dovrebbe naturalmente o forzatamente salire verso l'alto o scendere verso il basso.

La stabilità statica è regolata dalla galleggiabilità (o buoyancy) espressa dal principio di Archimede. La **buoyancy** è un una forza verticale legata a un gradiente di pressione che non è bilanciato dalla gravità, ed è attribuibile a variazioni di densità nella colonna atmosferica.

3.2 Buoyancy

Considero l'equazione verticale per la conservazione della quantità di moto dove trascuriamo l'attrito

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_w \quad \rightarrow \quad \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (50)$$

Definiamo uno stato di base omogeneo orizzontale (definito da variabili sopralineate) che è in bilancio idrostatico

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g \quad (51)$$

Ogni campo sarà definito come uno stato di base sommato a una perturbazione $p = \bar{p}(z) + p'$, $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'$. Sottraggo l'equazione completa dall'ultima e ottengo

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + B\end{aligned}\quad (52)$$

dove B è la buoyancy e $-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z}$ è la forza legata a perturbazioni verticali del gradiente di pressione (VEDI importanza in supercelle nelle slide sulla convezione) che nasce da anomalie di densità e gradienti di velocità.

Applico l'approssimazione anelastica che è valida quando il quadrato della velocità di spostamento è molto minore del quadrato della velocità del suono $u^2 \ll c^2$ (quasi sempre valido nei moti atmosferici). In questo caso allora $\rho(x, y, z, t)$ può essere rimpiazzato con $\bar{\rho}(z)$ in tutte le equazioni di conservazione della quantità di moto tranne nel numeratore del termine di galleggiamento (che rimane $\rho - \rho(z)$) nell'equazione per i moti verticali. Cosa significa? Significa che in tutte le equazioni $\rho' \ll \bar{\rho}$ è tale da essere trascurata. La densità perturbata non influisce sull'inerzia del fluido (tranne sulla propagazione di onde sonore che elimino dalle soluzioni) ma resta unicamente nel termine che genera galleggiamento. L'approssimazione anelastica utilizza $\bar{\rho}(z)$, differenziandosi dall'approssimazione di Boussinesq che mantiene una ρ_0 costante ovunque.

Scrivendo l'equazione dei gas come $\bar{p} + p' = R(\bar{\rho} + \rho')(\bar{T}_v + T'_v)$, mediando e sottraendo quello che si ottiene dall'equazione originale si può dimostrare che

$$B = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g \approx \left(\frac{T'_v}{\bar{T}_v} - \frac{p'}{\bar{p}} \right) g \quad (53)$$

in molte situazioni $\left| \frac{p'}{\bar{p}} \right| \ll \left| \frac{T'_v}{\bar{T}_v} \right|$, e dando per scontato che lo stato di base sia quello dell'ambiente allora

$$B \approx \frac{T'_v}{\bar{T}_v} g = \frac{T_{vp} - T_{venv}}{T_{venv}} g \quad (54)$$

3.3 Instabilità statica

L'instabilità che andiamo a studiare è quella data dal richiamo verso l'alto o il basso della buoyancy. Trascuriamo: perturbazioni di pressioni, viscosità, forza di Coriolis e presenza di vapore acqueo (per ora). Si parta da una posizione di equilibrio z_0 con $T = \bar{T}(z_0) = T_0$. Riscriviamo l'equazione verticale per la conservazione della quantità di moto con Δz spostamento infinitesimo tale che $z = z_0 + \Delta z$

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = g \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} \quad (55)$$

con un'approssimazione di Taylor al primo ordine anche

$$T = T_0 - \Gamma_p \Delta z \quad (56)$$

con $\Gamma_p = -\partial T / \partial z$ è il **lapse rate** della parcel. Nel caso di parcel in condizioni non sature allora $\Gamma_p = \Gamma_d$, altrimenti $\Gamma_p = \Gamma_s$.

Lo stesso per l'ambiente con

$$\bar{T} = T_0 - \Gamma_{env} \Delta z \quad (57)$$

dove $\Gamma_{env} = -\partial \bar{T} / \partial z$

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -g \frac{\Gamma_p - \Gamma_{env}}{T_0 - \Gamma_{env} \Delta z} \Delta z$$

ma per piccoli spostamenti $T_0 \gg \Gamma_{env} \Delta z$ e quindi

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} + \frac{g}{T_0} (\Gamma_p - \Gamma_{env}) \Delta z = 0 \quad (58)$$

che è un'equazione di secondo grado (oscillatore armonico) di cui sappiamo le soluzioni

$$\Delta z(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{T_0}(\Gamma_p - \Gamma_{env})}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{T_0}(\Gamma_p - \Gamma_{env})}t} \quad (59)$$

Se $\Gamma_{env} < \Gamma_p$ ho una situazione di **stabilità statica** perchè prendendo la parte reale dell'equazione e imponendo $\Delta z(0) = \Delta z_0$ ottengo

$$\Delta z(t) = \Delta z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{T_0}(\Gamma_p - \Gamma_{env})}t\right) \quad (60)$$

la parcel oscilla attorno alla sua posizione iniziale. Definisco la frequenza di Brunt-Vaisala come

$$N = \left[\frac{g}{T_0}(\Gamma_p - \Gamma_{env})\right]^{1/2} \quad (61)$$

che è una misura della stabilità statica: più alta la frequenza, più grande la stabilità ambientale.

Se $\Gamma_{env} > \Gamma_p$ allora

$$\Delta z(t) = \Delta z_0 e^{\sqrt{\frac{g}{T_0}(\Gamma_p - \Gamma_{env})}t} \quad (62)$$

la situazione è di **instabilità statica** con la parcel che tenderà ad allontanarsi dalla sua posizione iniziale.

Cerchiamo ora di rapportare i risultati trovati rispetto a un ambiente stabile o instabile. Per una parcel "secca" (non satura) si ha che:

$$\begin{cases} \Gamma_d = \Gamma_{env} & \text{neutro} \\ \Gamma_d > \Gamma_{env} & \text{instabile} \\ \Gamma_d < \Gamma_{env} & \text{stabile} \end{cases} \quad (63)$$

Se pensiamo tuttavia a una situazione con una parcel con presenza di vapore acqueo allora dobbiamo tenere conto anche di $\Gamma_s < \Gamma_d$, in questo caso possiamo dire che l'atmosfera o un layer di atmosfera è

$$\begin{cases} \Gamma_{env} = \Gamma_d & \text{neutro rispetto a moti verticali non saturi} \\ \Gamma_{env} = \Gamma_s & \text{neutro rispetto a moti verticali saturi} \\ \Gamma_{env} > \Gamma_d & \text{assolutamente instabile} \\ \Gamma_{env} < \Gamma_s & \text{assolutamente stabile} \\ \Gamma_s < \Gamma_{env} < \Gamma_d & \text{condizionatamente instabile} \end{cases} \quad (64)$$

Condizionatamente instabile indica una situazione stabile rispetto a moti verticali non saturi ($\Gamma_{env} > \Gamma_s$) ma instabile rispetto a moti verticali saturi ($\Gamma_{env} < \Gamma_d$).

Un **layer** è una regione tra due altezze in cui il lapse rate è approssimativamente costante.

Vediamo anche il punto di incontro tra lapse rate e temperatura potenziale. Avevamo già trovato che

$$c_p \frac{d\theta}{\theta} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

e con il bilancio idrostatico

$$c_p \frac{d\theta}{\theta} = c_p \frac{dT}{T} + R \frac{\rho g}{\rho R T} dz \quad \rightarrow \quad c_p T \frac{d\theta}{\theta} = c_p dT + g dz$$

e riscrivendo $d\theta = \partial\theta/\partial z$ e lo stesso per T allora

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) \quad (65)$$

ricordando che $\Gamma_{env} = -\partial T/\partial z$ e che $g/c_p = \Gamma_d$ allora ho che

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T} (\Gamma_d - \Gamma_{env}) \quad (66)$$

questo significa che se θ aumenta con l'altezza allora l'ambiente è stabile rispetto a sollevamenti per parcel che non sono saturi.

Generalizzo quindi le condizioni trovate per il lapse rate precedentemente in termini di θ e θ_{es} :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial\theta/\partial z < 0 & \text{assolutamente instabile} \\ \partial\theta_{es}/\partial z > 0 & \text{assolutamente stabile} \\ \partial\theta_{es}/\partial z < 0 & \text{condizionatamente stabile} \\ \partial\theta/\partial z = 0 & \text{neutro rispetto a moti verticali non saturi} \\ \partial\theta_{es}/\partial z = 0 & \text{neutro rispetto a moti verticali saturi} \end{array} \right. \quad (67)$$

Perchè θ_{es} e non θ_e ? θ_e si conserva in modo lagrangiano seguendo una parcel, θ_{es} è invece utile in modo euleriano per paragonare il lapse rate con il moist adiabatic lapse rate. Bisogna stare attenti a differenziare quello che è il lapse rate ambientale rispetto a quello che è il movimento della parcel verticale. θ_{es} riflette il profilo ambientale (cosa succederebbe se l'aria fosse satura). θ_e riflette l'effettivo contenuto di umidità nel layer ed è utile infatti per definire l'**instabilità potenziale** (VEDI slide).

Queste definizioni di stabilità sono basate su infinitesime variazioni verticali e definiscono la stabilità di un layer dell'atmosfera per questo si parla di *stabilità statica*. Una cosa diversa è invece legata a uno spostamento finito e superiore a dz di una parcel e il fatto che sia portato a salire indefinitivamente o no.