Curve e superfici - Prova scritta
28 maggio 2026
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

1. Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)\right).$$

(1) Si determinino i punti in cui la curva è regolare e quelli in cui la curva è biregolare.

(2) Si calcolino curvatura e torsione in un generico punto.

(3) Si determini il triedro di Frenet nel punto $\alpha(1)$.

2. Sia

$$\phi : (0, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3,\ \phi(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, \cos u)$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

(1) Si dica se $S = \phi((0, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2))$ è una superficie regolare, giustificando la risposta.

(2) Si calcolino la curvatura gaussiana, la curvatura media, le curvature principali e le direzioni principali nel punto $\phi(\pi/2, 0)$.

(3) Si dica per quali a il punto $\phi(\pi/2, 0)$ è un ombelico.

3. (3.1) Siano date due superfici regolari S_1 e S_2. Si dia la definizione di isometria (globale) tra S_1 e S_2.

(3.2) Sia S una superficie regolare di rotazione. Si dimostri che le rotazioni di $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse di rotazione sono isometrie di S in sè.