Esercizio 1

- $\underline{\alpha = \frac{1}{2}}$

Lungo la retta $x=y$ si ha

$$|f(x,x)| = \frac{|x|\,|x|^{1/2}}{2x^2} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty ,$$

dunque f non è continua in $(0,0)$.

- $\underline{\alpha = 2}$

Con la maggiorazione $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$,

si trova

$$|f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0 ,$$

dunque f è continua in $(0,0)$.

Osserviamo che f è costante sull'asse x e sull'asse y, dunque entrambe le derivate parziali esistono e valgono zero.

Tuttavia, f non è differenziabile. Infatti, se lo fosse, allora $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ per quanto appena osservato e di conseguenza ogni derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v$$

sarebbe nullo. Questo però è falso. In effetti, scegliendo un qualsiasi versore $v = (\lambda, \mu)$ con $\lambda, \mu \neq 0$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(tv) - 0 \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{\lambda t \, \mu^2 t^2}{t^2}$$

$$= \lambda \mu^2 \neq 0.$$

In alternativa, si può verificare direttamente che nella formula $f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + r(x,y)$, il resto $r(x,y)$ non soddisfa $\dfrac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} \xrightarrow[(x,y) \to 0]{} 0$. In effetti

$$\frac{|r(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left| \frac{x y^2}{x^2+y^2} \right|$$

e restringendosi a $x = y$ si trova $\dfrac{|x|^3}{\sqrt{2x^2} \cdot 2x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, che non tende a 0 per $x \to 0$.

- $\underline{\alpha = 3}$

Con lo stesso argomento del punto precedente si verifica che f è continua in $(0,0)$ e che entrambe le derivate parziali esistono e sono nulle.

Studiamo la differenziabilità. Scrivendo

$$r(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{\nabla f(0,0)}_{=(0,0)} \cdot (x,y),$$

si ha

$$\frac{|r(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{|x|\,|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0.$$

usando $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Dunque r soddisfa la condizione per la differenziabilità e f è differenziabile.

<u>Osservazione</u> L'uso delle coordinate polari è spesso conveniente in questo tipo di limiti. Per esempio, lo studio della continuità di f può essere fatto scrivendo

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{r^{1+\alpha}\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|^\alpha}{r^2}$$

$$= r^{\alpha-1}\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|^\alpha$$

Si vede facilmente che,

- per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si trova $\dfrac{|\cos\vartheta|\,|\sin\vartheta|^{1/2}}{\sqrt{r}} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty$

  per i ϑ t.c. $\sin\vartheta\cos\vartheta \neq 0$;

- per $\alpha = 2$ si trova $r\,|\cos\vartheta|\,|\sin\vartheta|^2 \leq r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$;

- idem per $\alpha = 3$.

Esercizio 2

Ricordiamo che la funzione è differenziabile in $(0,0)$ se, per definizione, il resto

$$r(x,y) := f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)$$

soddisfa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 .$$

Calcoliamo dunque tale limite.

Anzitutto, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ perché f è costante lungo l'asse x e lungo l'asse y. Dunque $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Si ha allora

$$\frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^{2\alpha}\,|\sin\vartheta|^\alpha\,|\cos\vartheta|^\alpha}{r}$$

coordinate polari
$x = r\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$

$$= r^{2\alpha-1}\,|\sin\vartheta|^\alpha\,|\cos\vartheta|^\alpha .$$

, dunque

Ora,

- Se $\alpha < \frac{1}{2}$, $r^{2\alpha-1} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty$ per ogni ϑ

t.c. $\sin\vartheta\cos\vartheta \neq 0$, dunque il limite non esiste.

Per esempio, senza usare coord. polari, lungo la retta $x=y$ si trova $|x|^{2\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$ perché $2\alpha-1<0$,

- Se $\alpha=\frac{1}{2}$, $|\sin\vartheta|^{\alpha}\,|\cos\vartheta|^{\alpha}$ dipende dall'angolo ϑ scelto e non vale 0 per $\sin\vartheta\cos\vartheta\neq 0$.

Per esempio, lungo la retta $x=y$ si ha

$$\frac{|x|^{\frac{1}{2}}\,|y|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{x\to 0}{\not\to} 0 .$$

- Se $\alpha>\frac{1}{2}$, $r^{2\alpha-1}\underbrace{|\sin\vartheta|^{\alpha}\,|\cos\vartheta|^{\alpha}}_{\leq 1} \leq r^{2\alpha-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$

Equivalentemente, con la maggiorazione $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$, $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$, si trova

$$\frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2\alpha-1} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0 .$$

In conclusione, f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha>\frac{1}{2}$.

Esercizio 3

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2e^{-x^2+y}\, x\,(x^2+y-1) \\ e^{-x^2+y}\,(1+x^2+y) \\ 6z^5 - 2\alpha z \end{pmatrix}$$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x(x^2+y-1) = 0 \\ x^2+y+1 = 0 \\ 2z(3z^4-\alpha) = 0 \end{cases}.$$

Si trova $z = 0$ oppure $z = \pm\sqrt[4]{\frac{\alpha}{3}}$ se $\alpha \geq 0$.

Poi, per x e y, si trova

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = -1 - x^2 \end{cases}$$

non ammette soluzioni

Dunque per $\alpha > 0$ ci sono i tre punti critici

$$P = (0, -1, 0), \quad \pm Q = \left(0, -1, \pm\sqrt[4]{\tfrac{\alpha}{3}}\right)$$

mentre per $\alpha \leq 0$ c'è solo P.

L'hessiana di f è

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y,z) =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{y-x^2}\left(-4x^2+2x^2(x^2+y)+1-(x^2+y)\right) & -2x e^{y-x^2}(x^2+y) & 0 \\ -2x e^{y-x^2}(x^2+y) & e^{y-x^2}(x^2+y+2) & 0 \\ 0 & 0 & 30z^4-2\alpha \end{pmatrix}$$

e valutata in $P=(0,-1,0)$ dà

$$\mathrm{Hess}\, f(P) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

che è diagonale con due autovalori positivi e il terzo che dipende da α. Dunque, se $\alpha<0$ la matrice è definita positiva e P è un minimo. Se $\alpha>0$, P è invece un punto di sella. Infine, se $\alpha=0$, la considerazione dell'hessiana non ci permette di concludere.

In tal caso l'analisi è più delicata e non è grave ometterla. Ad ogni modo, si può procedere come segue per mostrare che, per $\alpha=0$, P è ancora punto di minimo.

Scrivendo

$$f(x,y,z) = (x^2+y)e^{y-x^2} + z^6,$$

1) la funzione z^6 ha un minimo in $z=0$ perché $z^6 \geq 0$;

2) anche $(x^2+y)\,e^{y-x^2}$ ha un minimo in $(0,-1)$, dal momento che la sua hessiana in $(0,-1)$ è

$\begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$ definita positiva.

Invece, nei punti $\pm Q$ (con $\alpha>0$),

$$\text{Hess} f(\pm Q) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{30\frac{\alpha}{3} - 2\alpha}_{=8\alpha} \end{pmatrix}$$

e la matrice ha tutti gli autovalori positivi, dunque $\pm Q$ sono punti di minimo.

Esercizio 4

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\, e^{\alpha x - y} & (1+\alpha x) \\ x\, e^{\alpha x - y} & (1-y) \\ 2\alpha z\, e^{\alpha z^2} & \end{pmatrix}$$

I punti critici sono dati dalle condizioni

$$\begin{cases} y=0 \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{\alpha} \\ x=0 \quad \text{o} \quad y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

ossia $P = (0,0,0)$, $Q = (-\frac{1}{\alpha}, 1, 0)$.

L'hessiana è

$$\begin{pmatrix} \alpha y\, e^{\alpha x - y}(2+\alpha x) & (1+\alpha x)(1-y)\, e^{\alpha x - y} & 0 \\ (1+\alpha x)(1-y)\, e^{\alpha x - y} & x(y-2)\, e^{\alpha x - y} & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha(1+z^2)\, e^{\alpha z^2} \end{pmatrix}$$

e valutata in P dà

$$\mathrm{Hess} f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$ Guardando i minori principali,

si trova

$$\det(0) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = -2\alpha .$$

→ non sono tutti positivi, né a segni alterni, perché il primo è nullo

Dunque la matrice non è definita positiva né definita negativa. In particolare, poiché $\det(\text{Hess} f(P)) \neq 0$, non ha autovalori nulli, quindi P è necessariamente punto di sella.

Invece,
$$\text{Hess} f(Q) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-2} & & \\ & \frac{1}{\alpha} e^{-2} & \\ & & 2\alpha \end{pmatrix}$$

è diagonale, con tutti gli autovalori positivi se $\alpha > 0$ e negativi se $\alpha < 0$.

→ Q è minimo se $\alpha > 0$ e massimo se < 0.

Esercizio 5

Usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange con

$f(x,y) = x^2+y^2$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^2 - 1$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad e \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\,(1+y^2) \\ 2y\,(1+x^2) \end{pmatrix}$$

Risolvendo $\nabla f = \lambda \nabla g$, si trova

$$\begin{array}{ll} (i) & \\ (ii) & \\ (iii) & \end{array} \begin{cases} x\,(\lambda + \lambda y^2 - 1) = 0 \\ y\,(\lambda + \lambda x^2 - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Supponiamo $x=0$. Allora $y^2 = 1$ dalla (iii), ossia $y = \pm 1$.

Simmetricamente, se $y=0$ troviamo $x = \pm 1$. Se invece entrambi $x, y \neq 0$, allora $\lambda \neq 0$ necessariamente, affinché (i) e (ii) possano essere soddisfatte, e si trova

$$\begin{cases} 1 + y^2 - \frac{1}{\lambda} = 0 \\ 1 + x^2 - \frac{1}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

da cui $y = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$ e $x = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$.

In particolare, $x^2 = y^2$ e, sostituendo nella (iii), risulta

$$x^2 + x^2 + x^2x^2 = 1$$

da cui $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ ossia $x^2 = -\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$= -1 \pm \sqrt{2}$, di cui solo $-1+\sqrt{2}$ è accettabile in quanto $-1-\sqrt{2}$ è negativo.

Dunque le soluzioni di $(*)$ sono

$P_1 = (0, 1)$ $\quad P_3 = (1, 0)$ $\quad Q_1 = (\xi, \xi)$ $\quad Q_3 = (-\xi, \xi)$

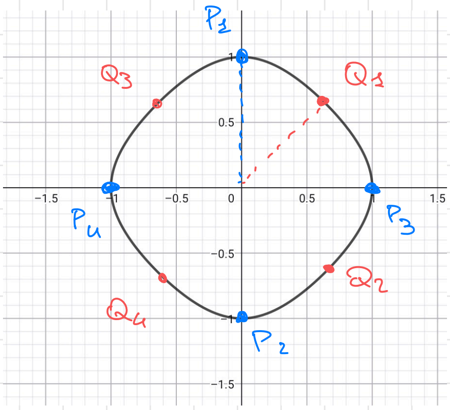
$P_2 = (0, -1)$ $\quad P_4 = (-1, 0)$ $\quad Q_2 = (\xi, -\xi)$ $\quad Q_4 = (-\xi, -\xi)$

dove $\xi = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Sostituendo in f_1 si trova

$$f(P_j) = 1, \qquad f(Q_j) = 2\xi^2 = \sqrt{2} - 1 < 1.$$

Dunque i P_j sono massimi vincolati e i Q_j i minimi vincolati.



Esercizio 6

$$2^n n! \log(1 + n^{-n}) \sim 2^n n! n^{-n}$$

per $n \to \infty$

ricordando $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$.

La serie $\sum_n 2^n n! n^{-n}$ converge per il criterio del rapporto. Si ha infatti

$$\frac{2^{n+1} (n+1)! (n+1)^{-(n+1)}}{2^n n! n^{-n}}$$

$$= 2 (n+1) (n+1)^{-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2 e^{-1} < 1 .$$

Esercizio 7

Se $x \geq 1$, la successione $x^{n^{1/3}}$ non converge a 0 per $n \to \infty$, dunque la serie non può convergere.

Supponiamo ora $0 < x < 1$. Il criterio della radice non consente di concludere. Si può dimostrare che la serie converge con il criterio dell'integrale oppure con il criterio di condensazione.

1° modo: Poiché $x^{n^{1/3}}$ è decrescente, possiamo ricondurci a studiare la convergenza di $\int_1^\infty x^{t^{1/3}}\, dt$.

Si ha $x^{t^{1/3}} = e^{t^{1/3} \log x}$ e

$$\int_1^\infty e^{t^{1/3} \log x}\, dt \underset{\substack{t = u^3 \\ dt = 3u^2 du}}{=} \int_1^\infty 3u^2 e^{u \log x}\, du .$$

Ricordando che $\log x < 0$ e ponendo $-\log x = \lambda$, basta mostrare che

$$\int_1^\infty u^2 e^{-\lambda u}\, du$$

converge. Questo è vero per esempio perché

$$u^2 e^{-\lambda u} \leq \frac{1}{u^2} \quad \text{per } u \text{ sufficientemente grande.}$$

effetti

$$u^2 \cdot u^2 e^{-\lambda u} \xrightarrow[u \to \infty]{} 0,$$

dunque è definitivamente < 1.

In alternativa si può esplicitamente integrare $\int u^2 e^{-\lambda u} \, du$.

<u>2° modo</u>: Per il criterio di condensazione, possiamo ridurci a studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, x^{(2^n)^{1/3}}$$

Applicando il criterio della radice, si ha

$$\left(2^n x^{2^{n/3}} \right)^{1/n} = 2 \, x^{\frac{2^{n/3}}{n}}$$

e $\frac{2^{n/3}}{n} \to \infty$ per $n \to \infty$. Poiché $0 < x < 1$, segue che $x^{\frac{2^{n/3}}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ e la serie dunque converge.

Esercizio 8

$$\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right) \log(n+4) \sim \frac{1}{n^\alpha} \log(n)$$

per $n \to \infty$

e ricordiamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ converge se e solo se

$\alpha > 1$.

$$\left(\text{infatti} \quad \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{\log n}{n^\alpha} = \underbrace{\frac{\log n}{n^\varepsilon}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} \le \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} \quad \text{per } n \gg 0 \right)$$

Esercizio 9

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n-4}\right)^{1/n}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\log(3n-4)}$$

e osserviamo che $-\frac{1}{n}\log(3n-4) \sim -\frac{1}{n}\log(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dunque $\frac{1}{R} = e^0 = 1$ e $R = 1$. Per $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-4}$, che diverge per confronto con la serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$. Per $x = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-4}$ converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 10

- $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}-x}$ è improprio in 0, e $x = o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$ (infatti $\frac{x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$), dunque $\frac{1}{\sqrt{x}-x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$, e l'integrale converge per confronto asintotico con $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

- $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}-x}$ è improprio anche in 1. Si ha, per $a \in (0,1)$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-x} = \int_{a-1}^0 \frac{dy}{\sqrt{y+1}-(y+1)}$$

cambio di variabili
$y = x-1$

e, ricordando $\sqrt{1+y} \sim 1 + \frac{1}{2}y$ per $y \to 0$,

si trova $\frac{1}{\sqrt{y+1}-y-1} \sim \frac{1}{1-\frac{1}{2}y-1} = -\frac{2}{y}$, e

per confronto asintotico con $\int_{a-1}^0 \frac{dy}{y}$, l'integrale diverge.

Metodo alternativo: con il cambio di variabili

$x = u^2 \quad (dx = 2u\,du)$, si trova

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - x} = \int_{\sqrt{a}}^1 \frac{2u\,du}{u - u^2}$$

$$= 2\int_{\sqrt{a}}^1 \frac{du}{1-u}$$

che non converge (per esempio scrivendolo esplicitamente come

$$2 \lim_{b \to 1^-} \left[-\log(1-b) + \log(1-\sqrt{a}) \right]).$$

- $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$ è improprio in 0 e all'infinito.

Per $x \to 0$, $x^2 = o(\sqrt{x})$ e $\frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, dunque l'integrale converge in 0 per confronto asintotico con $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Per $x \to \infty$, $\sqrt{x} = o(x^2)$ e $\frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$, dunque l'integrale converge all'infinito per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Esercizio 11

$$f(x) := \frac{\arctan(x^{3\alpha})\,(\log x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}}$$

Supponiamo dapprima $\alpha \geq 0$. L'integrale è improprio in $x=1$ e all'infinito.

Per $x \to 1$, studiamo ad esempio $\int_1^2 f(x)\,dx$. Allora per $1 \leq x \leq 2$ si ha

$$|\arctan(x^{3\alpha})(\log x)^{\alpha}| \leq \arctan(2^{3\alpha})(\log 2)^{\alpha} =: C$$

e l'integrale converge per confronto con $\int_1^2 \frac{C}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Invece, per quanto riguarda $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$, si ha

$\arctan(x^{3\alpha}) \geq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ e $\log(x) \geq \log 2$, dunque

$$f(x) \geq \frac{\pi}{4}\frac{(\log x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{\pi}{4}\frac{\log 2}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\pi \log 2}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Allora l'integrale diverge per confronto con $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Supponiamo ora $\alpha < 0$. L'integrale è ancora improprio in 1 e all'infinito. Studiamo separatamente $\int_1^2 f$ e $\int_2^{\infty} f$.

- Per $1 < x \leq 2$ si ha

$$C_1 := \underbrace{\arctan\left(2^{3\alpha}\right)}_{\neq 0} \le \arctan\left(x^{3\alpha}\right) \le \arctan\left(1^{2\alpha}\right) = \frac{\pi}{4},$$

da cui

$$C_1 \frac{1}{(\log x)^{-\alpha}\sqrt{x-1}} \le f(x) \le \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{(\log x)^{-\alpha}\sqrt{x-1}}$$

Per confronto, $\int_1^2 f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere di

$$\int_1^2 \frac{dx}{(\log x)^{-\alpha}\sqrt{x-1}}.$$

Ricordando che, per $x \to 1$,

$$\log x = \log(1+(x-1)) \sim x-1,$$

segue che

$$\frac{1}{(\log x)^{-\alpha}\sqrt{x-1}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^{1/2-\alpha}}$$

e $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\sigma}}$ converge se e solo se $\sigma < 1$,

cioè nel nostro caso $\frac{1}{2}-\alpha < 1$, ossia $\alpha > -\frac{1}{2}$.

- Per $x \to \infty$ si ha $x^{3\alpha} \to 0$ (stiamo sempre supponendo $\alpha < 0$) e dunque $\arctan\left(x^{3\alpha}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{3\alpha}$.

Inoltre $\sqrt{x-1} \sim \sqrt{x}$, quindi

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^{3\alpha}(\log x)^{\alpha}}{x^{1/2}} = \frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{\frac{1}{2}-3\alpha}}.$$

e per confronto asintotico è sufficiente studiare la convergenza di

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(\log x)^{-\alpha}\, x^{\frac{1}{2}-3\alpha}} .$$

Ricordiamo che $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} (\log x)^{\beta}}$ converge se e solo se $\sigma > 1$ oppure $\sigma = 1$ e $\beta > 1$.

Nel nostro caso ciò significa

$$\frac{1}{2} - 3\alpha > 1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{1}{2} - 3\alpha = 1 \ \text{ e } \ -\alpha > 1$$

ossia

$$\alpha < -\frac{1}{6} \qquad \text{oppure} \qquad \underbrace{\alpha = -\frac{1}{6} \ \text{ e } \ \alpha < -1}_{\text{impossibile}}$$

In definitiva, l'integrale converge se e solo se

$$-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{6} .$$