Esercizio 1

Abbiamo derivato la seguente espressione per il contributo a un loop alla tre punti 1PI tra due elettroni e un fotone in QED

$$\Gamma^\mu(p,p')|_{1\text{ loop}} = -ie^2\mu^{2\epsilon}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma^\nu(\not{p}'-\not{k}+M)\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}+M)\gamma_\nu}{((p'-k)^2-M^2)((p-k)^2-M^2)k^2} + \delta Z_V\gamma^\mu\ , \tag{1}$$

dove p (p') è il momento entrante (uscente) nella linea fermionica. Semplifica l'espressione restringendoti a $p = p'$, quindi calcolala usando l'identità

$$\frac{1}{A^2B} = 2\int_0^1 dx\,\frac{x}{[xA+(1-x)B]^3}\ , \tag{2}$$

per mettere insieme i denominatori usando un parametro di Feynman. Ottieni il valore di δZ_V in schema $\overline{\text{MS}}$ e verifica l'identità $\delta Z_V = \delta Z_\Psi$ derivante dall'invarianza di gauge.

Esercizio 2

Rinormalizzando la teoria di Yukawa a un loop, usando dimreg e nello schema $\overline{\text{MS}}$, si trovano le seguenti espressioni per le costanti di rinormalizzazione dei coupling $\lambda\phi^4$ e $y\phi\bar{\Psi}\Psi$:

$$\begin{aligned}\delta Z_y &= \frac{5y^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_{\text{E}}+\log(4\pi)\right)\ ,\\ \delta Z_\lambda &= \frac{3\lambda+8y^2-48\frac{y^4}{\lambda}}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_{\text{E}}+\log(4\pi)\right)\ .\end{aligned} \tag{3}$$

Deriva la funzione β per entrambe le costanti di accoppiamento a 1 loop, $\beta_\lambda^{1\text{ loop}}(\lambda,y)$ e $\beta_y^{1\text{ loop}}(y)$.