# Svolgimento scritto del 28 maggio 2026

martedì 2 giugno 2026 20:28

① $H: 2x - y + 2z = 1$ , $P = (0, 0, 1)$

(1) $H' \ni P$ e $H' \parallel H$:

$H'$ deve avere stessa giacitura di $H$

quindi $H': 2x - y + 2z = d$

passaggio per $P = (0, 0, 1)$: $0 - 0 + 2 = d$

$\Rightarrow H': 2x - y + 2z = 2$

(2) $r \ni P$ $r \parallel H$:

scelgo un vettore in $W_H$; $W_H$ ha eq.

$2x - y + 2z = 0$, quindi $W_H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

ad es. scelgo $w = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$r: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Eq. cartesiane $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 - x \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Altro modo: se $r \ni P$ e $r \parallel H \Rightarrow r \subseteq H'$

Per trovare eq. cartesiane per $r$ basta cons. un arbitrario piano $M \ni P$, e intersecarlo con $H'$; ad es:

$M: y = 0$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(3) Dire se può esistere affinità $f: \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ t.c.

$$f(H) = H, \quad f(P) = (0, 0, -1)$$

Per il Teorema di struttura per affinità, se fissiamo 4 punti affinemente equivalenti nel dominio : $P_1, P_2, P_3, P_4$ e 4 punti

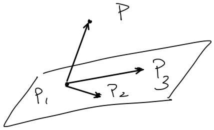
affinemente equivalenti nel codominio $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$,

$\exists!\, f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ t.c. $f(P_i) = Q_i$.

Scelgo 3 punti su $H$, che siano affinemente indipendenti:

$P_1, P_2, P_3 \in H$, non allineati

pongo $P_4 = P$ ;



Oss. che $P_1, P_2, P_3, P$ sono affinemente indipendenti; se non fosse così, allora

$\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P}$ sarebbero LIN. DIP.

Ma $\mathrm{Span}(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = W_H$, e

$\overrightarrow{P_1P} \in W_H \Rightarrow P \in H$, mentre non è così.

Scelgo poi $Q_1 = P_1$, $Q_2 = P_2$, $Q_3 = P_3$, $Q_4 = (0,0,-1)$

anche $Q_4 \notin H$, quindi i 4 punti sono affinemente indipendenti.

$\Rightarrow \exists!\, f$ affinità t.c. $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_2$, $f(P_3) = P_3$, $f((0,0,1)) = (0,0,-1)$

Inoltre: $H = L(P_1, P_2, P_3)$ (spazio affine generato da $P_1, P_2, P_3$), e abbiamo visto che

$$f(H) = f(L(P_1, P_2, P_3)) = L(f(P_1), f(P_2), f(P_3)) = L(P_1, P_2, P_3) = H$$

② (1) $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,0)$,
$C = (0,0,1)$, $D = (1,0,1)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$s: \begin{cases} x = \varepsilon \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

(2) $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ non sono proporzionali $\Rightarrow$ r e s non sono parallele

Vediamo se sono incidenti: $\begin{cases} 0 = \varepsilon \\ t = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$ è SL incompatibile

$\Rightarrow$ r e s sono sghembe.

(3) Distanza tra r e s: cons. il generico punto R di r e il generico punto S di s,

poi cons. $\vec{RS}$ e impongo $\vec{RS} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{RS} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{RS} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{RS} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t = 0$

$\vec{RS} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon = 0$

$\Rightarrow$ il vettore cercato è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Inoltre $d(r,s) = \|\vec{RS}\| = 1$.

(4) In generale, se $W \subseteq V$ è ssv,

la simmetria lineare rispetto a $W$ è definita da:

$sy_W : V \to V$ , se $v \in V = W \oplus W^{\perp}$

$v = v_W + v_{W^{\perp}}$ in modo unico

$sy_W(v) := v_W - v_{W^{\perp}}$

In particolare, se $V = \mathbb{R}^3$ e

$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, si ha $W^{\perp} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ e

dato un vettore generico

$$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} \in W, \quad \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} \in W^{\perp}$$

$$\mathrm{sym}_W\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\\-z\end{pmatrix}.$$

③

3. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ si considerino le rette affini $\sigma_1$ e $\sigma_2$ di equazioni

$$\sigma_1 \,:\, x+y=3, \quad \sigma_2 \,:\, x+y=1.$$

(a) **(2 punti)** si determinino le chiusure proiettive $\bar{\sigma}_1$ di $\sigma_1$ e $\bar{\sigma}_2$ di $\sigma_2$ e i loro punti impropri;

(b) **(4 punti)** si determini una proiettività $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che

$$f(\sigma_1) = \sigma_2, \quad f(\sigma_2) = \sigma_1.$$

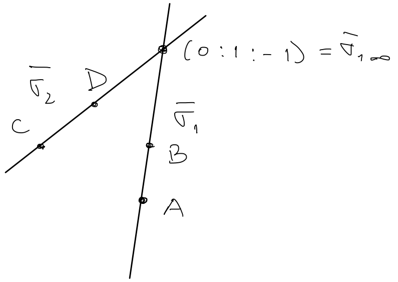
ⓐ $\bar{\sigma}_1 : x_1 + x_2 - 3x_0 = 0$, punto improprio: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (0:1:-1) = \sigma_{1\infty}$

$\bar{\sigma}_2 : x_1 + x_2 - x_0 = 0$, punto improprio: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (0:1:-1) = \sigma_{2\infty} = \sigma_{1\infty}$

ⓑ Una proiettività di $\mathbb{P}^2$ è univocamente determinata dall'immagine di 4 punti in posizione generale, cioè a 3 a 3 non allineati. Possiamo scegliere $A, B \in \bar{\sigma}_1$ e $C, D \in \bar{\sigma}_2$; se sono tutti $\neq \sigma_{1\infty}$, sono in posizione generale:



Ad esempio: $A = (1:3:0)$ $\quad C = (1:1:0)$

$B = (1:0:3)$ $\quad D = (1:0:1)$

Cerco $f = [\varphi]$ t.c. $f(A) = C$

$f(C) = A$

$f(B) = D$

$f(D) = B$

Se $\varphi$ è rappresentata da una matrice $M$, si dovrà avere:

$M = (m_{ij})_{\substack{i=0,1,2\\ j=0,1,2}}$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_{00} + 3m_{01} = \rho_1 \\ m_{10} + 3m_{11} = \rho_1 \\ m_{20} + 3m_{21} = 0 \end{cases}$$

$$m_{11} = \frac{\rho_1}{3} = \frac{m_{00}}{3} + m_{01}$$

$$3\rho_2 = -\rho_4 + \rho_2 + 3\rho_4$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_{00} + m_{01} = \rho_2 \\ m_{10} + m_{11} = 3\rho_2 \\ m_{20} + m_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{20} = m_{21} = 0$$

$$m_{11} = 3\rho_2$$

$$2\rho_2 = 2\rho_4$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \rho_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_{00} + 3m_{02} = \rho_3 \\ m_{10} + 3m_{12} = 0 \\ m_{20} + 3m_{22} = \rho_3 \end{cases}$$

$$m_{22} = \frac{\rho_3}{3} = 3\rho_4$$

$$\Rightarrow m_{10} = m_{12} = 0$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_{00} + m_{02} = \rho_4 \\ m_{10} + m_{12} = 0 \\ m_{20} + m_{22} = 3\rho_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} -3\rho_4 & 4\rho_4 & 4\rho_4 \\ 0 & 3\rho_4 & 0 \\ 0 & 0 & 3\rho_4 \end{pmatrix}$$

Ad es.

per $\rho_4 = 1$ $\quad M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Verifica: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. **(5 punti)** Si consideri la famiglia di coniche affini reali dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

Studiando la matrice associata, si determinino le coniche degeneri della famiglia e il tipo di coniche non degeneri, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$B = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det B = (-1)\cdot(-1+1) - 1\cdot(a-1) = 1-a$$

$$\det B = 0 \iff a = 1$$

In questo caso la conica è degenere e la equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

$$(x-y)^2 - 2(x-y) = 0$$

$(x-y)(x-y-2) = 0$ e il luogo degli zeri sono 2 rette parallele, cioè una parabola degenere.

Se $a \neq 1$, la conica è non degenere

$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = a - 1 \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$

$a > 1$ ELLISSE
$a = 1$ : caso degenere
$a < 0$ : IPERBOLE.