Geometria 2 2025/26 - prova scritta 28 maggio 2026

Prof. Valentina Beorchia

1. Nello spazio affine standard $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con il riferimento affine canonico, si considerino il piano H e il punto P dati da:
$$H \ : \ 2x - y + 2z = 1, \qquad P = (0, 0, 1).$$
Si determini:
   (a) **(3 punti)** un' equazione cartesiana del piano H' passante per P e parallelo ad H;
   (b) **(3 punti)** delle equazioni cartesiane di una retta r passante per P e parallela ad H;
   (c) **(4 punti)** si dica, giustificando la risposta, se può esistere un'affinità $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3$ tale che
$$f(H) = H, \quad f(P) = (0, 0, -1).$$

2. Nello spazio euclideo standard $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ con il sistema cartesiano canonico, si determinino:
   (a) **(2 punti)** delle equazioni parametriche delle rette r passante per i punti $A = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$, ed s passante per i punti $C = (0, 0, 1)$ e $D = (1, 0, 1)$;
   (b) **(3 punti)** si dica se le rette r ed s sono parallele, incidenti o sghembe;
   (c) **(3 punti)** si determini la distanza tra r ed s;
   (d) **(3 punti)** si scrivano le equazione della simmetria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla retta (vettoriale) r.

3. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ si considerino le rette affini σ_1 e σ_2 di equazioni
$$\sigma_1 \ : \ x + y = 3, \quad \sigma_2 \ : \ x + y = 1.$$
   (a) **(2 punti)** si determinino le chiusure proiettive $\bar{\sigma}_1$ di σ_1 e $\bar{\sigma}_2$ di σ_2 e i loro punti impropri;
   (b) **(4 punti)** si determini una proiettività $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che
$$f(\bar{\sigma}_1) = \bar{\sigma}_2, \quad f(\bar{\sigma}_2) = \bar{\sigma}_1.$$

4. **(5 punti)** Si consideri la famiglia di coniche affini reali dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:
$$ax^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$
Studiando la matrice associata, si determinino le coniche degeneri della famiglia e il tipo di coniche non degeneri, al variare di $a \in \mathbb{R}$.