

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 5/6/2026

*NB: Il testo occupa fronte e retro del foglio.
Non è permesso l'uso di smartphone, appunti e testi.*

1. (a) (5 punti) Si rappresentino nel piano cartesiano l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{\ln(3 - x^2 - y^2)}$$

(b) (3 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(0, \sqrt{2})$ e $(1, 1)$.

(c) (2 punti) L'insieme D è convesso? È compatto? Si giustificino le risposte.

2. Sia data la funzione:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sqrt{|y|}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) (2 punti) Si studi la continuità della funzione g in $(0, 0)$.

(b) (1 punto) Si stabilisca se g ammette derivate parziali nell'origine e, in caso affermativo, se ne calcoli il valore.

(c) (2 punti) Si studi la differenziabilità della funzione g in $(0, 0)$.

3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n + 2}{(\pi + 1)^n - n}$$

(b) (2 punti) Si trovi l'insieme di convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} (x - 1)^{2n}$$

4. (a) (1 punto) Siano f e g due funzioni definite su un intervallo chiuso di numeri reali $[a, b]$ e a valori reali, con f limitata e g monotona. Si dia la definizione dettagliata di integrabilità di f rispetto a g secondo Riemann-Stieltjes.

5. (a) (1 punto) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1, 1)$ la curva definita dall'equazione:

$$e^{xy-1} + x^2 + 3y - 5 = 0$$

identifica univocamente una funzione implicita del tipo $y = g(x)$.

(b) (1 punto) Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(1, 1)$.

6. (a) (2 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $h(x, y) = y$ sulla regione del piano compresa nel primo quadrante e delimitata dalle rette di equazione $y = x, y = 2x, x + y = 3$.

7. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 4$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = e^{x^3 - y^3 + 2xy}.$$