COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- (3 punti) Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}} - x - \frac{\sin(x^{-1})}{2}}{x^2\sin(x^{-1}) - x\cancel{1}}$. $= 1$

$\text{Num} = x(1+x^{-1}+x^{-2})^{\frac{1}{2}} - x - \frac{\sin(x^{-1})}{2} = x\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^{-2} + o(x^{-2})\right) - \cancel{x} - \frac{1}{2x} + o(x^{-2})$

$= \frac{1}{2} + o(1)$

$\text{den} = x^2\left(\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{6x^3} + o(x^{-3})\right) - \cancel{x} = -\frac{1}{6x}\left(1 + o(1)\right)$

$\Rightarrow L = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{6x}} = \lim_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$

- (3 punti) Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \sin(t^2)\,dt$. $y = t^2 \quad dy = 2t\,dt, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\int_x^{2x} \sin(t^2)\,dt = \int_{x^2}^{4x^2} \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}\,dy \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

- (2 punti) Si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \int_{\arctan(x)}^{\arcsin\left(\sqrt{1+x^3}\right)} \sin(t^2)\,dt$.

$f'(x) = \arcsin'\left((1+x^3)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\, 3x^2 \sin\left(\arcsin^2\left(\sqrt{1+x^3}\right)\right)$

$- \arctan'(x)\sin\left(\arctan^2(x)\right) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\cancel{1} - (\cancel{1}+x^3)}}\ \dfrac{3}{2}\ \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \sin\left(\arcsin^2\left(\sqrt{1+x^3}\right)\right) - \dfrac{\sin\left(\arctan^2(x)\right)}{\cancel{1}+x^2}$

ESERCIZIO N. 2.

Studiare la funzione $f(x) = e^x(x^2+1)$.

- Si trovi il dominio di f e se ne analizzi il comportamento sulle estremità del dominio;

Dominio $= \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} e^x x^2$ $\begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$

- Si calcoli $f'(x)$, si trovino punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$f'(x) = (x^2+1+2x)e^x = (x+1)^2 e^x > 0 \quad \forall x \neq -1$

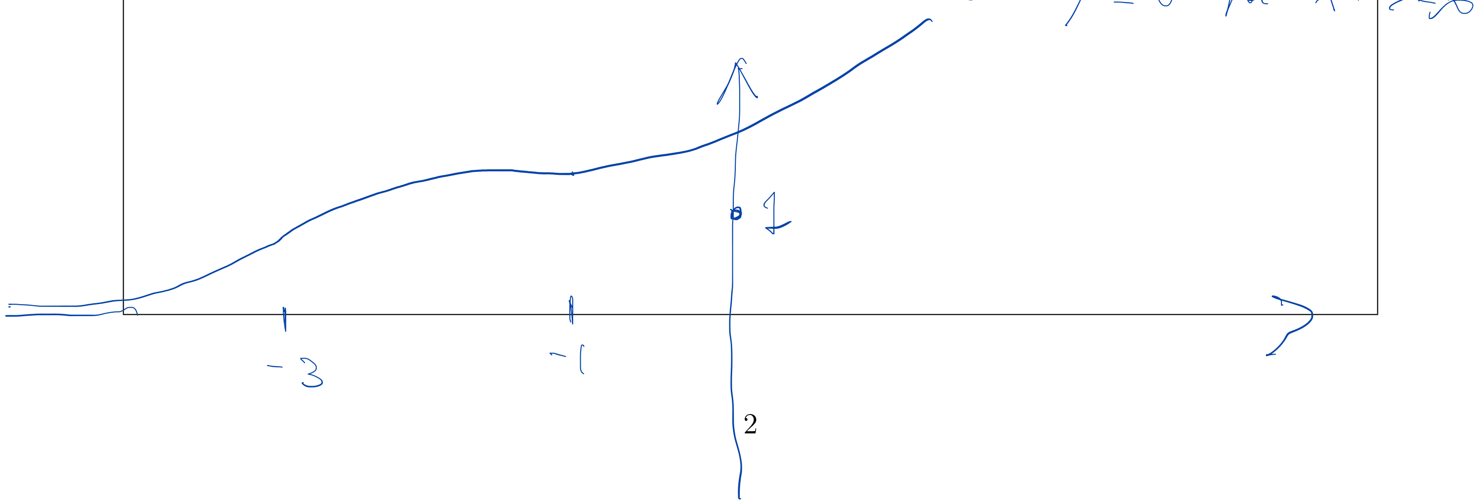
$f'(-1) = 0$. Ovviamente -1 è solo un flesso

- Si calcoli la derivata seconda e si studi concavità e convessità;

$f''(x) = \left(2(x+1) + (x+1)^2\right) e^x = (x+1)(x+3)e^x$

flessi $x = -1, -3$, convesso in $(-\infty, -3]$, con concavo in $[-3, -1]$, convesso in $[-1, +\infty)$

- Si trovino le eventuali rette asintotiche e si tracci il grafico. Solo $y = 0$ per $x \to -\infty$



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ______________________

ESERCIZIO N. 3.

- Si calcoli $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^3+x^2+x}}_{R(x)} dx.$

$R(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$A = \frac{1}{x^2+x+1}\Big|_{x=0} = 1$ $\quad A+B=1$ (da $xR(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0 = A+B$)

$B=-1$ $\quad R(x) = \frac{\cdots + (A+C)x + }{x^3+x^2+x}$ ← termine di grado 1

$\Rightarrow A+C=0 \Rightarrow C=-1$

ecc.

- Si calcolino le primitive di $\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{dx}$ $\quad y=x^2 \quad dy = 2x\,dx$

$= \int \frac{y\,e^y}{2}\,dy = \frac{y\,e^y}{2} - \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{y\,e^y - e^y}{2} + C$ ecc

- Si stabilisca, per $[x]$ la parte intera di x, se $\underbrace{\sqrt[7]{1+\frac{1}{[x]}+\frac{1}{[x]^2}} - \tanh(x)}_{f(x)}$ è integrabile in $[1,+\infty)$;

$f(x) = \left(1+\frac{1}{[x]}+\frac{1}{[x]^2}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 - \underbrace{(th(x)-1)}_{\text{integrabile}} =$

$= \underbrace{\frac{1}{7}\,\frac{1}{[x]}}_{\text{non integrabile}} + \underbrace{\left(\binom{\frac{1}{7}}{2}+1\right)\frac{1}{[x]^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{integrabile}}$

- Si stabilisca, motivando la risposta, se $x^2\sin(x)$ è integrabile in $[1,+\infty)$.

$\int x^2 \sin x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \cos x$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\sin x + C$

$\Rightarrow \int_1^R x^2 \sin x\,dx = -R^2\cos R + 2R\sin R - 2\sin R + \cos 1$

è facile vedere che non esiste il limite per $R\to+\infty$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 5 di $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$f(x) = \cos(x) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right)}_{P_5(x)} + o(x^5)$$

$L[y]$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione generale di $y'' - y' = x^2$.

$$p(r) = r^2 - r = 0 \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$y_h = A + B e^x$$

$$y_p = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

$$L[y_p] = y_p'' - y_p' = 6\alpha x + \beta - (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) =$$

$$= -3\alpha x^2 + 2(3\alpha - \beta)x + \beta - \gamma = x^2$$

$$\begin{cases} -3\alpha = 1 \\ 6\alpha - 2\beta = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{3} \\ \beta &= 3\alpha = -1 \\ \gamma &= \beta = -1 \end{aligned}$$