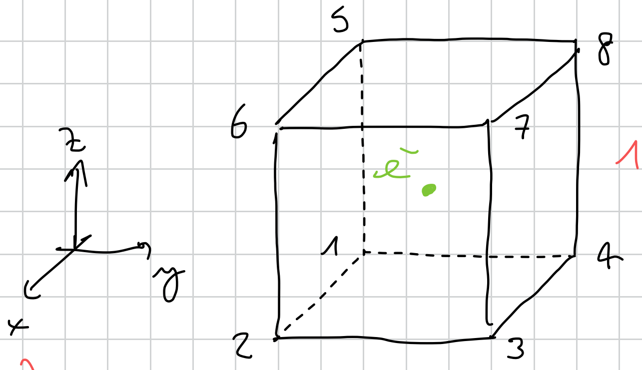
ESERCIZIO 1



1) $U_{e^-} = (U_{e1} + U_{e2}) + (U_{e3} + U_{e4}) + (U_{e5} + U_{e6}) + (U_{e7} + U_{e8}) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

2)

$$\vec F_{51} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(0,0,+1)$$
$$\vec F_{21} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(1,0,0)$$
$$\vec F_{41} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(0,1,0)$$

$= 2.89 \times 10^{-9}\,N\,\hat z$

$$\vec F_{15} + \vec F_{65} + \vec F_{85} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 5.01 \times 10^{-9}\,N\,\frac{(\hat x + \hat y + \hat z)}{\sqrt3}$$

$$\vec F_{61} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, 2a^2}\frac{(-1,0,-1)}{\sqrt2}$$
$$\vec F_{81} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, 2a^2}\frac{(0,-1,-1)}{\sqrt2}$$
$$\vec F_{31} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, 2a^2}\frac{(-1,-1,0)}{\sqrt2}$$

$= 1.45 \times 10^{-9}\,N\,\frac{-\hat x - \hat z}{\sqrt2}$

$$\vec F_{25} + \vec F_{45} + \vec F_{75} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\simeq 2.04 \times 10^{-9}\,N\,(-\hat x - \hat y - \hat z)$$
$$= 3.55 \times 10^{-9}\,N\,\frac{-\hat x - \hat y - \hat z}{\sqrt3}$$

$$\vec F_{71} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, 3a^2}\frac{(1,1,1)}{\sqrt3} \simeq 9.65 \times 10^{-10}\,N\,\frac{\hat x + \hat y + \hat z}{\sqrt3}$$

3)

$$\boxed{\vec F_{TOT}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt2} + \frac{1}{3\sqrt3}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt3 - \sqrt{\frac32} + \frac13\right)\frac{(1,1,1)}{\sqrt3}$$

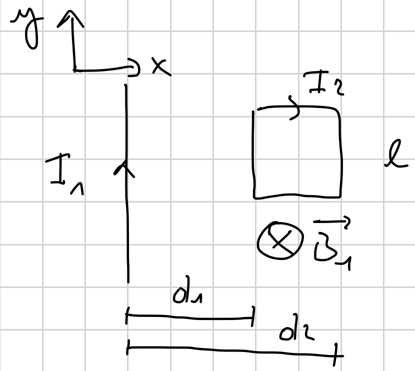
$$\boxed{\simeq 1.40 \times 10^{-9}\,N\,(\hat x + \hat y + \hat z) = 2.43 \times 10^{-9}\,N\,\frac{\hat x + \hat y + \hat z}{\sqrt3}}$$

La forza è diretta lungo la diagonale del cubo, con verso entrante. È una forza di tipo attrattivo

4) $\vec{F}'_{TOT} = \dfrac{\vec{F}_{TOT}}{\varepsilon_r}$

È irrealistico perché la distanza tra gli ioni del reticolo è paragonabile alla distanza tra gli atomi del materiale: non si può parlare di dielettrico

ESERCIZIO 2



1) $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ entrante

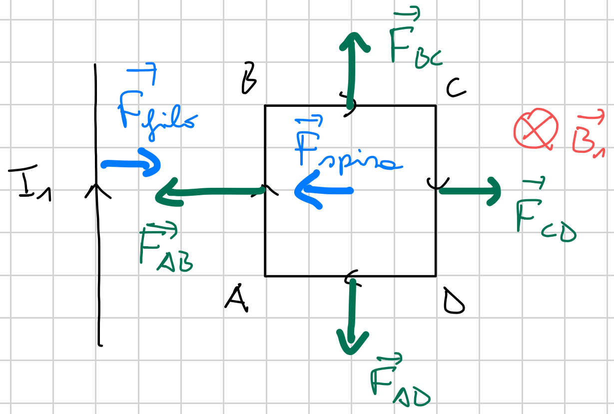
$$\boxed{\Phi_1} = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{d_1}^{d_2} dx \int_0^{l} dy \, \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x} = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 (d_2 - d_1)}{2\pi} \log \frac{d_2}{d_1} \approx 1.2 \times 10^{-9} \text{ Wb}}$$

2) Per il terzo principio $\vec{F}_{filo} = -\vec{F}_{spira}$

dove $\vec{F}_{spira}$ è la forza totale agente sulla spira, pari alla somma delle forze sui lati

$$\vec{F}_{spira} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA}$$



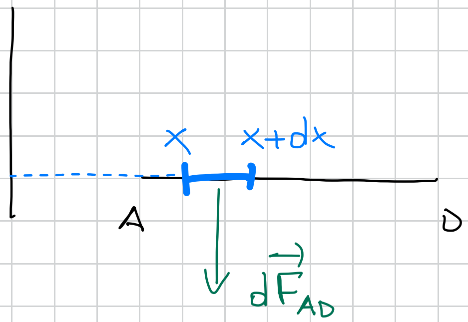
$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{AD}$$

$$\vec{F}_{AB} = I_2 \, l \, B_1(d_1) \, (-\hat{x}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d_1} \hat{x} \approx -2.25 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{CD} = I_2 \, l \, B_2(d_2) \, \hat{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d_2} \hat{x} \approx 1.125 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{filo} = -\vec{F}_{AB} - \vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \approx 1.125 \times 10^{-7} \text{ N}}$$

3)



Dato un trattino di lunghezza dx, su di esso agisce una forza

$$\vec{dF}_{AD} = I_2 \, dx \, B_1(x) \, (-\hat{y}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \, dx \, \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AD} = \int d\vec{F}_{AD} = -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x} = -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \log \frac{d_2}{d_1}$$

$$\boxed{\vec{F}_{AD} = -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \log \frac{d_2}{d_1} \approx 1.6 \times 10^{-7} \, N}$$

ESERCIZIO 3

1) Essendo la resistenza nulla $\mathcal{E} = -L \frac{dI(t)}{dt} = -L\alpha$

Calcolo L:

$$L = \mu_0 n^2 h \pi r^2 \approx 1.6 \text{ mH}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -L\alpha = -\mu_0 n^2 h \pi r^2 \alpha \approx -1.9 \times 10^{-4} \text{ V}}$$

2) L'energia è completamente immagazzinata nel campo magnetico

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2} L I_0^2 \approx 1.15 \times 10^{-3} \text{ J}}$$

3) Il flusso del campo del solenoide attraverso la spira è

$$\phi = \ell^2 B = \ell^2 \mu_0 n I_0 \approx 7.6 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

Il coefficiente di mutua induzione vale

$$\boxed{M = \phi / I_0 = \mu_0 n \ell^2 \approx 6.4 \times 10^{-7} \text{ H}}$$

4) La fem sulla spira vale (con segno arbitrario)

$\mathcal{E}_{spira}(t) = M \frac{dI}{dt} = M\alpha$ costante nel tempo

La corrente è $I_{spira} = \mathcal{E}_{spira} / R$ costante

La potenza dissipata vale quindi

$$P = R I_{spira}^2 = \mathcal{E}_{spira}^2 / R = M^2 \alpha^2 / R \approx 1.5 \times 10^{-15} \text{ W}$$

$$\Rightarrow \Delta U = P \Delta t = M^2 \alpha^2 \Delta t / R \approx 1.5 \times 10^{-11} \text{ J}$$

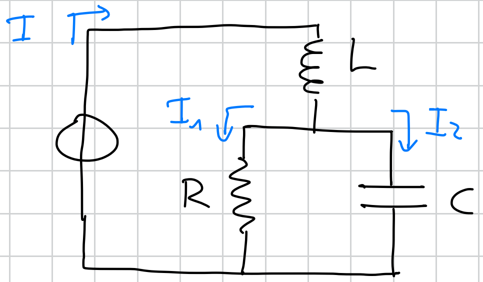
ESERCIZIO 4

1) Per $\underline{\omega = 0}$ il condensatore si comporta come un circuito aperto, mentre l'induttanza come un cortocircuito $\left(i\omega L \to 0,\ \frac{1}{i\omega C} \to \infty \right)$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_0 = RI \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_0 = \mathcal{E}_0 / R \approx 25\ mA}$$

Per $\underline{\omega \to \infty}$ L è un circuito aperto $(i\omega L \to \infty) \Rightarrow \boxed{I = 0}$

2)



Ad ogni istante la tensione sul resistore R e sul condensatore C è identica

$$R\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{I}_2}{i\omega C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{I}_2 = i\omega C R \tilde{I}_1$$

Inoltre $\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \tilde{I} \quad \Rightarrow \quad \tilde{I}_1 (1 + i\omega C R) = \tilde{I}$

Quindi

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}} &= i\omega L \tilde{I} + R\tilde{I}_1 \\ &= i\omega L \tilde{I} + \frac{R}{1 + i\omega RC} \tilde{I} = \\ &= \left(i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC} \right) \tilde{I}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Z &= i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC} \\ \text{e} \quad \tilde{I} &= \frac{1 + i\omega RC}{i\omega L - \omega^2 RLC + R} \tilde{\mathcal{E}} \end{aligned}}$$

3) $\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_0 \Rightarrow \boxed{U_C = \frac{1}{2} C \mathcal{E}_0^2 \approx 1.4 \times 10^{-4}\,J}$

$I = I(0) \Rightarrow \boxed{U_L = \frac{1}{2} L I(0)^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\right)^2 \approx 1.6 \times 10^{-6}\,J}$