(4) (5 punti) Si consideri la famiglia di coniche affini reali dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax + 2y = 0$$

Studiando la matrice associata, si determinino le coniche degeneri della famiglia e il tipo di coniche non degeneri, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

La matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det B = -a(-1+a) - 1(1-a) = (1-a)(a-1) = -(a-1)^2$$

La conica è degenere $\iff \det B = 0 \iff a = 1$.

Per $a=1$, la conica è: $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$

$(x-y)^2 - 2(x-y) = 0$

$(x-y)(x-y-2) = 0$ e sono 2 rette parallele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ tutte le coniche non degeneri sono delle PARABOLE.

Geometria 2 - Prova scritta
28 maggio 2026
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) Nello spazio affine standard $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con il riferimento affine canonico, si considerino le rette r ed s date da:

$$r : \begin{cases} x = & 1-t \\ y = & 1+t \\ z = & t, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = & 2\tau \\ y = & 1-\tau \\ z = & 2, \end{cases}$$

(1) **(3 punti)** Si dica se r e s sono parallele, incidenti o sghembe;
(2) **(3 punti)** si scriva un'equazione cartesiana del fascio di piani di sostegno s;
(3) **(4 punti)** si determinino delle equazioni di un'affinità $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che

$$f(r) = s, \quad f(s) = r.$$

① I vettori di direzione sono: $v_r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Non sono proporzionali, quindi le rette non sono parallele.
Vediamo se sono incidenti: $\begin{cases} 1-t = 2\tau \\ 1+t = 1-\tau \\ t = 2 \end{cases}$ è incompatibile, quindi r e s sono sghembe.

② Per scrivere il fascio, abbiamo individuare 2 piani contenenti s, quindi scriviamo equazioni cartesiane per s, ad esempio

$$\begin{cases} z = 2 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Fascio: $\lambda(z-2) + \mu(x+2y-2) = 0.$

③ $f : A^3_R \to A^3_R$ affinità t.c. $f(r) = s$, $f(s) = r$.

Possiamo fissare 4 punti affinemente indipendenti e le loro immagini, ad esempio: $R_1, R_2 \in r$, $S_1, S_2 \in s$

e imporre
$f(R_1) = S_1$
$f(R_2) = S_2$
$f(S_1) = R_1$
$f(S_2) = R_2$

$R_1 = (1,1,0)$, $R_2 = (0,2,1)$
$S_1 = (0,1,2)$, $S_2 = (2,0,2)$

$f(x,y,z)$ si esprime con $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \begin{cases} a_{11} + a_{12} + c_1 = 0 \\ a_{21} + a_{22} + c_2 = 1 \\ a_{31} + a_{32} + c_3 = 2 \end{cases}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a_{12} + a_{13} + c_1 = 2 \\ 2a_{22} + a_{23} + c_2 = 0 \\ 2a_{32} + a_{33} + c_3 = 2 \end{cases}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} a_{12} + 2a_{13} + c_1 = 1 \\ a_{22} + 2a_{23} + c_2 = 1 \\ a_{32} + 2a_{33} + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \begin{cases} 2a_{11} + 2a_{13} + c_1 = 0 \\ 2a_{21} + 2a_{23} + c_2 = 2 \\ 2a_{31} + 2a_{33} + c_3 = 1 \end{cases}$$

Raggruppo le eq.:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + c_1 = 0 \\ 2a_{12} + a_{13} + c_1 = 2 \\ a_{12} + 2a_{13} + c_1 = 1 \\ 2a_{11} + 2a_{13} + c_1 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

sono 4 eq. in 4 incognite $a_{11}, a_{12}, a_{13}, c_1$

Analogamente le seconde righe di ogni sistema danno luogo a:

$$\begin{cases} a_{21} + a_{22} + c_2 = 1 \\ 2a_{22} + a_{23} + c_2 = 0 \\ a_{22} + 2a_{23} + c_2 = 1 \\ 2a_{21} + 2a_{23} + c_2 = 2 \end{cases} \qquad (**)$$

e le terze righe

$$\begin{cases} a_{31} + a_{32} + c_3 = 2 \\ 2a_{32} + a_{33} + c_3 = 2 \\ a_{32} + 2a_{33} + c_3 = 0 \\ 2a_{31} + 2a_{33} + c_3 = 1 \end{cases} \qquad (***)$$

Osserviamo che i 3 sistemi lineari hanno tutti la stessa matrice dei coefficienti M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{cambiamo solo i termini noti } b = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Per il Teorema di Cramer, ogni sistema lineare $(*)$ $(**)$ e $(***)$ ha un'unica soluzione, data da $M^{-1} \cdot b$.

Si trova: $$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/3 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) Si consideri lo spazio euclideo standard $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ con il sistema cartesiano canonico.

(1) **(3 punti)** Si scrivano delle equazioni per il luogo dei punti appartenenti al piano H di equazione $y - z + 2 = 0$ e aventi uguale distanza dai punti $A(1, 0, -1))$ e $B(2, 1, -1)$. Si descriva geometricamente l'insieme trovato.

(2) **(4 punti)** si scriva un'equazione cartesiana del generico piano ortogonale ad H e passante per $P = (1, 0, 0)$;

(3) **(4 punti)** si dica, giustificando la risposta, se la famiglia di piani del punto precedente è un fascio, e in caso affermativo si trovino due generatori del fascio.

① Se $P = (x, y, z)$, $d(A, P) = \|\vec{AP}\|$, $d(B, P) = \|\vec{BP}\|$, $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, -1)$

$$\|\vec{AP}\| = \|\vec{BP}\| \iff \|\vec{AP}\|^2 = \|\vec{BP}\|^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

$$\iff \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \iff 2x + 2y - 4 = 0 \\ P \in H: \ y - z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ il luogo cercato è una retta, di equazioni $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$

② $H: y - z + 2 = 0$, un vettore normale ad H è $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

H' di eq. $ax + by + cz = d$ e $H' \perp H \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff b - c = 0$$

Quindi il generico piano ortogonale ad H ha eq.

$ax + by + bz = d$; impongo passaggio per $P = (1, 0, 0)$:

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + b \cdot 0 = d \Rightarrow a = d$$

$$\Rightarrow H': \ ax + by + bz - a = 0$$

③ Il generico piano è $a(x-1) + b(y+z) = 0$

si tratta di un fascio, con generatori i piani $x - 1 = 0$ e $y + z = 0$

(3) (6 punti) Sia $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la proiettività che trasforma ordinatamente E_0, E_1, E_2, U in U, E_0, E_1, E_2, dove E_0, E_1, E_2 sono i punti fondamentali e U è il punto unità. Scrivere equazioni di f e determinare i suoi punti fissi.

$E_0 = (1:0:0)$

$E_1 = (0:1:0)$

$E_2 = (0:0:1)$

$U = (1:1:1)$

$f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$f(E_0) = U$

$f(E_1) = E_0$

$f(E_2) = E_1$

$f(U) = E_2$

$f = [M]$, se M è la matrice di f, $M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{01} \\ m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} = \rho_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \rho_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} + m_{01} + m_{02} \\ m_{10} + m_{11} + m_{12} \\ m_{20} + m_{21} + m_{22} \end{pmatrix} = \rho_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 \\ \rho_1 & 0 & \rho_3 \\ \rho_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 0 \\ \rho_1 + \rho_3 = 0 \\ \rho_1 = \rho_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \rho_1 & -\rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 0 & -\rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ ad esempio per $\rho = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) (6 punti) Sia $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la proiettività che trasforma ordinatamente E_0, E_1, E_2, U in U, E_0, E_1, E_2, dove E_0, E_1, E_2 sono i punti fondamentali e U è il punto unità. Scrivere equazioni di f e determinare i suoi punti fissi.

Punti fissi: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(P) = P \iff f(v) = \lambda v, \; \lambda \in \mathbb{R}, \; \lambda \neq 0$

$P = [v], \; v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow$ i punti fissi di f corrispondono alle classi di autovettori di f.

$$P_M(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ 1 & -x & -1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) + (-x)\left(-x(1-x)+1\right)$$
$$= 1 + x^2(1-x) - x = 1 + x^2 - x^3 - x$$
$$= -(x-1)(x^2+1)$$

$\Rightarrow$ unico autovalore $\lambda = 1$; autospazio

$$V_1 = \ker(M - \mathbb{I}_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le equazioni sono $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, $V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = P$, $\quad P = (1:0:1)$ unico punto fisso.