

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 12.06.26

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2025/2026

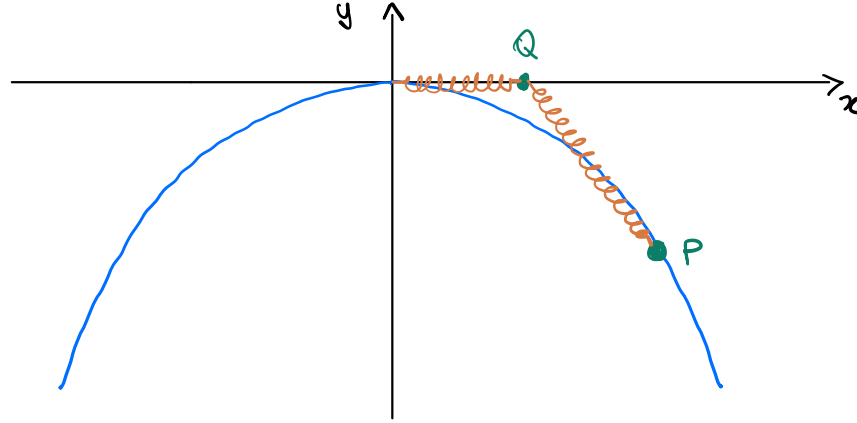
Esercizio 1

1. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Lagrangiano. Fare un esempio. [2pt]
2. Si enunci e si dimostri il teorema di Nöther *in meccanica Lagrangiana*. [4pt]
3. Sia dato un sistema Lagrangiano con $n = 3$ gradi di libertà, e due costanti del moto $f_1(q, \dot{q}), f_2(q, \dot{q})$. Quante equazioni differenziali al primo ordine bisogna risolvere su ogni insieme di livello $(f_1, f_2) = (c_1, c_2)$ (con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)? [1pt]
4. Sia data la Lagrangiana $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\alpha^2}{2}(q_2^2 + q_3^2)$: si applichi il teorema di Nöther per dimostrare che $M_1 = q_2\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_2$ è una costante del moto. [1,5pt]
5. Definire le Parentesi di Poisson e dimostrare la loro relazione con le costanti del moto. [1,5pt]
6. Si trovi l'Hamiltoniana che descrive il sistema del punto 4 e si dimostri, usando le Parentesi di Poisson, che M_1 è una costante del moto. [1,5]
7. Dimostrare che la seguente trasformazione di coordinate è canonica: [1,5pt]

$$\begin{aligned} p_1 &= \tilde{p}_1 & p_2 &= -\sqrt{2\alpha} \tilde{p}_2 \sinh \tilde{q}_2 & p_3 &= -\sqrt{2\alpha} \tilde{p}_3 \sinh \tilde{q}_3 \\ q_1 &= \tilde{q}_1 & q_2 &= \sqrt{\frac{2\tilde{p}_2}{\alpha}} \cosh \tilde{q}_2 & q_3 &= \sqrt{\frac{2\tilde{p}_3}{\alpha}} \cosh \tilde{q}_3 \end{aligned} \quad (1)$$

8. Si usi la trasformazione canonica (1) per trovare il moto $(p(t), q(t))$ che risolve le equazioni del moto per l'Hamiltoniana trovata al punto 6. [2pt]
9. Il flusso Hamiltoniano generato dall'Hamiltoniana al punto 6 è un famiglia di trasformazioni canoniche dipendenti da un parametro continuo. Si trovi la corrispondente trasformazione infinitesima. [1pt]
10. *Facoltativa: Il flusso Hamiltoniano generato dall'Hamiltoniana al punto 6 è una trasformazione canonica dipendente dal tempo. Si trovi l'espressione di $K_0(\tilde{p}, \tilde{q})$ relativa a tale trasformazione canonica.* [1,5pt]

Esercizio 2



Il sistema in figura è disposto su un piano verticale. Un punto materiale P , di massa m , è vincolato a muoversi sulla guida parabolica

$$y = -\frac{x^2}{a}, \quad a > 0.$$

Un secondo punto materiale Q , anch'esso di massa m , è vincolato a muoversi sull'asse orizzontale $y = 0$. Il punto Q è collegato all'origine da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre i due punti P e Q sono collegati tra loro da una seconda molla, di uguale costante elastica k e anch'essa di lunghezza a riposo nulla. **Sul sistema agisce la gravità.**

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'ascissa s del punto P e l'ascissa u del punto Q . In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].
2. Si trovino le equazioni di Lagrange del sistema [1,5pt].
3. Che simmetria ha il sistema (oltre all'invarianza per traslazioni temporali)? Ci sono costanti del moto associate ad essa? [0,5]
4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [5pt].
5. Si ponga $a = \frac{30mg}{k}$. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile e scrivere la Lagrangiana linearizzata. [2pt].
6. Si trovi la soluzione generale delle equazioni di Lagrange linearizzate relative alla Lagrangiana trovata nel punto 5. [2pt]
7. Si dica se il moto del sistema linearizzato (considerato nei punti 5 e 6) è periodico o no, motivando la risposta. [1pt]
8. *Facoltativa: Si consideri ora il caso in cui il piano su cui giace il sistema ruota di moto uniforme attorno all'asse y con velocità angolare costante ω . Scrivere la nuova Lagrangiana del sistema. Calcolare il valore di ω per cui c'è almeno un punto di equilibrio sulla retta $u = s$. [1,5pt]*