

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 22/6/2026

NB: Non è permesso l'uso di smartphone, appunti e testi.

1. (a) (5 punti) Si rappresentino nel piano cartesiano l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(y - x)}$$

- (b) (1 punto) Si calcoli il limite della funzione f in $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
(c) (2 punti) La frontiera di D è connessa per poligonalità? L'insieme di livello zero di f è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^2$? Si giustificino le risposte.

2. (a) (2 punti) Si studi il limite in $(0, 0)$ della funzione

$$g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}.$$

3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

- (b) (2 punti) Si trovi l'insieme di convergenza della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x^2}{n^5 + n^3 x^2}$$

- (c) (2 punti) Si dimostri che tale serie di funzioni converge uniformemente in ogni intervallo $[-a, a]$, con a numero reale positivo.

4. (a) (2 punti) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$. Si dimostri che f è continua in $(\bar{x}, \bar{y})$.

5. (a) (1 punto) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1, 1)$ la curva definita dall'equazione:

$$y^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

identifica univocamente una funzione implicita del tipo $y = g(x)$.

- (b) (2 punti) Si verifichi se 1 è un punto di minimo o di massimo locale per g .

6. (a) (3 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $h(x, y) = x \cos(\pi y)$ sulla regione del piano $E = E_1 \cup E_2$, dove

- E_1 è la regione del semipiano $y \geq 0$ compresa tra la parabola di equazione $y = 4 - x^2$ e l'asse x ;
- E_2 è la regione del semipiano $y \leq 0$ compresa tra la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, l'asse x e la retta $x = 3$.

7. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = \ln(x + 2) + x^2 + y^2 - 2x.$$