

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 6.07.26

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2025/2026

Esercizio 1

1. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Hamiltoniano. Fare un esempio. [2pt]
2. Definire le Parentesi di Poisson e dimostrare la loro relazione con le costanti del moto. [1,5pt]
3. Scrivere la definizione di trasformazione canonica e la relazione tra le Hamiltoniane coniugate (spiegando ogni simbolo in tale relazione). [2pt]
4. Definire cosa sono le trasformazioni simplettiche. Si dica il loro legame con le trasformazioni canoniche, dimostrando tale affermazione. [4pt]
5. Dimostrare che una trasformazione è canonica univalente se e solo se preserva le parentesi di Poisson. [1,5pt]
6. Dimostrare che la seguente trasformazione di coordinate è canonica $\forall \alpha$ [2pt]

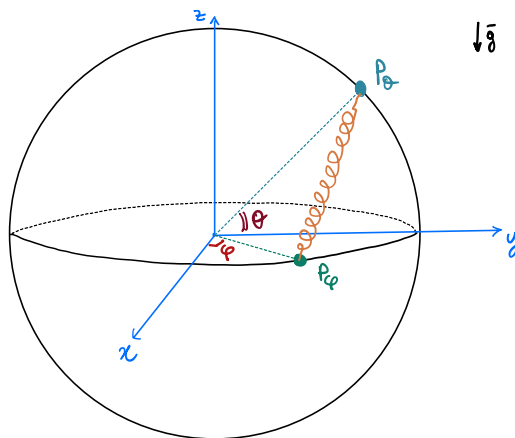
$$\begin{aligned} p_1 &= \tilde{p}_1 \cos \alpha - \tilde{q}_2 \sin \alpha & p_2 &= \tilde{p}_2 \cos \alpha - \tilde{q}_1 \sin \alpha \\ q_1 &= \tilde{q}_1 \cos \alpha + \tilde{p}_2 \sin \alpha & q_2 &= \tilde{q}_2 \cos \alpha + \tilde{p}_1 \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

7. Si dimostri che la famiglia ad un parametro di trasformazioni canoniche (1) è generata da $G(\tilde{p}, \tilde{q}) = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + \tilde{q}_1 \tilde{q}_2$. [2pt]
8. Si trovi la funzione generatrice $F_2(\tilde{p}, q)$ della trasformazione canonica (1). [1pt]
9. *Facoltativa: Si consideri la teoria di campo con densità Lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2(x) ,$$

dove $x \in \mathbb{R}^2$ ed è sottointesa la somma sugli indici ripetuti $\mu, \nu = 0, 1$. Si mostri che la Lagrangiana è invariante per traslazioni spaziali $x^1 \mapsto x^1 + \alpha$ e si trovi la carica conservata. [1,5pt]

Esercizio 2



Due guide circolari di raggio R hanno lo stesso centro: la prima giace nel piano orizzontale xy , la seconda nel piano verticale yz . Su ciascuna guida è vincolato a un punto materiale di massa m : P_φ sulla guida orizzontale e P_ϑ su quella verticale. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli φ e ϑ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].
2. Si trovino le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [4pt].
4. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabile e scrivere la Lagrangiana linearizzata. [1,5pt].
5. Si trovi la soluzione generale delle equazioni di Lagrange linearizzate relative alla Lagrangiana trovata nel punto 4. [1,5pt]
6. Si dica per quali valori dei parametri il moto del sistema linearizzato (considerato nei punti 4 e 5) è periodico, motivando la risposta. [1pt]

Si supponga ora che la guida verticale ruoti attorno all'asse z con velocità angolare costante ω , imposta dall'esterno. La guida orizzontale resta ferma.

7. Scrivere la nuova Lagrangiana del sistema. Si conserva l'energia in questo sistema? [1pt]
8. Si consideri la trasformazione di coordinate $\varphi = v(\tilde{\varphi}, t)$ tale che la nuova Lagrangiana $\tilde{L}$ non dipenda esplicitamente dal tempo. Scrivere tale Lagrangiana $\tilde{L}$. [1pt]
9. Si considerino le equazioni che danno i punti di equilibrio del sistema con Lagrangiana $\tilde{L}$. Posto $\tilde{\varphi} = 0$, ricavare la relazione che lega l'angolo di equilibrio ϑ_e del punto P_ϑ alla velocità angolare ω . [1pt]
10. *Facoltativa: Si vuole che, all'equilibrio, il punto P_θ si trovi a $z = 0$. Determinare il valore di ω necessario. Spiegare cosa sta succedendo fisicamente. [1,5pt]*