

Esercizio n. 1

$$n = 1,00 \text{ mol}$$

$$p_A = 4,00 \text{ atm}$$

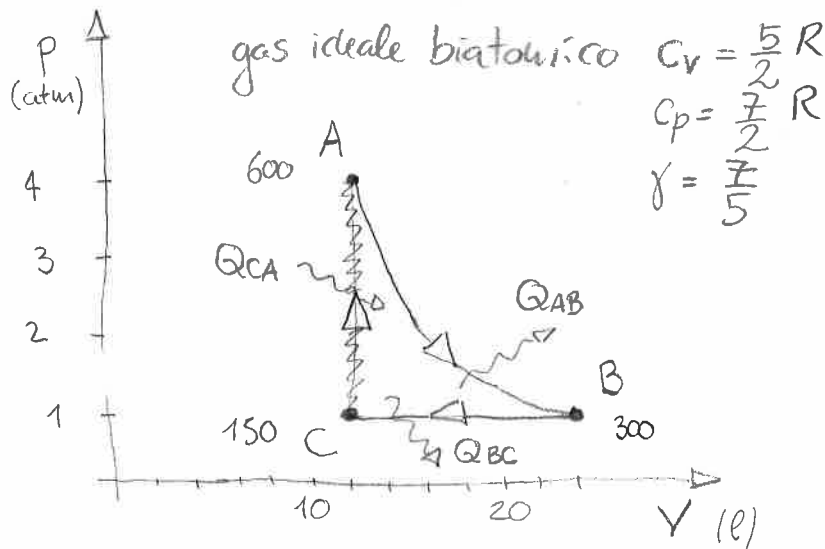
$$p_A V_A^2 = p_B V_B^2 \quad \alpha = 2$$

$$T_B = 300 \text{ K}$$

$$Q_{BC} = -4,36 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$p_C = p_B$$

$$V_C = V_A$$



a) Calcolare il rendimento η

Per prima cosa cerco di determinare gli stati A, B, e C:

Conoscendo Q_{BC} trovo subito T_C :

$$Q_{BC} = n C_P (T_C - T_B) \Rightarrow T_C = T_B + \frac{Q_{BC}}{n C_P} = 300 \text{ K} - \frac{4,36 \cdot 10^3 \text{ J}}{1,0 \text{ mol} \cdot \frac{7}{2} R} = 150 \text{ K} = \frac{1}{2} T_B$$

Inoltre, poiché $p_C = p_B$ (isobara) si ha pure:

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{1}{2} \quad V_C = \frac{1}{2} V_B = V_A$$

Poiché A e B sono legati da una poliotropica con $\alpha = 2$:

$$p_A V_A^2 = p_B V_B^2$$

$$\frac{p_A}{p_B} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow p_B = 1 \text{ atm} = p_C$$

A questo punto trovo tutto il resto:

$$V_B = \frac{n R T_B}{p_B} = 24,57 \text{ l}$$

$$V_C = V_A = 12,30 \text{ l}$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n R} = 599,3 \approx 600 \text{ K}$$

Per calcolare il rendimento η mi manca:

$$Q_{CA} = n C_V (T_A - T_C) = 9336 \text{ J}$$

ed infine mi manca pure:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta U_{AB} + L_{AB} = nC_V(T_B - T_A) + \frac{nR}{1-\alpha}(T_B - T_A) \\ &= n \frac{5}{2} R (T_B - T_A) + \frac{nR}{-1} (T_B - T_A) \\ &= nR(T_B - T_A) \left(\frac{5}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = -3733 \text{ J} \end{aligned}$$

(il segno negativo indica che il gas cede calore, quindi l'unico calore assorbito è Q_{CA}).

$$\begin{aligned} \text{Finalmente, } \eta &= \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = \frac{Q}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{Q_{CA}} \\ &= 1 - \frac{(4360 + 3733) \text{ J}}{9336 \text{ J}} = 13,31 \% \end{aligned}$$

b) Dalla teoria si ricava immediatamente:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 74,94 \% \approx 75\%$$

c) La variazione dell'entropia dell'universo per un ciclo è uguale a quella relativa all'unica trasformazione irreversibile, ovvero CA:

$$\Delta S^U = \Delta S_{CA}^U = \Delta S_{CA} + \Delta S_{CA}^{\text{amb}}$$

Per quanto riguarda il gas, posso immaginare una isocora reversibile che collega C ad A:

$$\Delta S_{CA} = \int_C^A \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \int_{T_C}^{T_A} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_A}{T_C} = 28,77 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Mentre per quanto riguarda l'ambiente, esso ha ceduto Q_{CA} rimanendo a temperatura T_A :

$$\Delta S_{CA}^{\text{amb}} = \frac{-9336 \text{ J}}{599,3 \text{ K}} = -15,58 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

In conclusione,

$$\Delta S^U = (28,77 - 15,58) \frac{\text{J}}{\text{K}} = 13,19 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Esercizio n. 2

$$S = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\epsilon V U^3} + b$$

$\epsilon \rightarrow$ costante di radiazione

$b \rightarrow$ costante arbitraria

Ricordiamo che combinando I e II principi si ottiene:

$$dU = TdS - pdV$$

e quindi:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV, \text{ da cui: } \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \text{ e } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}$$

Procediamo dunque al calcolo di queste derivate parziali:

$$\text{I } \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \left[\frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{4}{3} \epsilon^{1/4} V^{1/4} U^{3/4} + b \right) \right]_V = \frac{4}{3} \epsilon^{1/4} V^{1/4} \left(\frac{3}{4} U^{-1/4} \right) = \sqrt[4]{\frac{\epsilon V}{U}}$$

$$\text{II } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{4}{3} \epsilon^{1/4} V^{1/4} U^{3/4} + b \right) \right]_U = \frac{4}{3} \epsilon^{1/4} U^{3/4} \left(\frac{1}{4} V^{-3/4} \right) = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{\epsilon U^3}{V^3}}$$

Imponendo che I e II valgano rispettivamente $\frac{1}{T}$ e $\frac{p}{T}$ si ha:

$$\frac{1}{T} = \sqrt[4]{\frac{\epsilon V}{U}} \Rightarrow U = \epsilon V T^4 \quad (\text{energia interna}) \quad (**)$$

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{\epsilon U^3}{V^3}} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{\epsilon \epsilon^3 V^3 T^{12}}{V^3}} = \frac{1}{3} \epsilon T^3 \Rightarrow p = \frac{1}{3} \epsilon T^4 \quad (\text{EOS})$$

Si nota che nell'equazione di stato (EOS) non compare V .

Inoltre $U = U(V, T) = \epsilon V T^4$ può essere scritta anche come:

$$U = U(p, V) = 3 \underbrace{\left(\frac{1}{3} \epsilon T^4 \right)}_p V = 3 p V \quad (*)$$

Infine, l'energia libera di Gibbs (o entalpia libera) è definita come

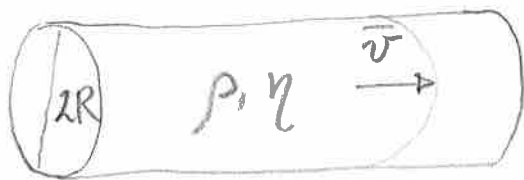
$$G = H - TS = U + pV - TS$$

$$(*) \mid = U + \frac{1}{3} U - T \left(\frac{4}{3} \sqrt[4]{\epsilon V U^3} + b \right)$$

$$\mid = \frac{4}{3} U - \frac{4}{3} \sqrt[4]{\epsilon V U^3} T - bT$$

$$(**) \mid = \frac{4}{3} U - \frac{4}{3} \sqrt[4]{U^3 \cdot U} - bT = -bT = 0 \text{ per } b=0$$

Esercizio n. 3



$$\begin{aligned}\rho &= 8,0 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3 \\ \eta &= 0,62 \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ 2R &= 0,50 \text{ m}\end{aligned}$$

La velocità critica è quella v_c per cui: $Re = \frac{\rho v_c 2R}{\eta} = 1200$.

Si trova quindi: $v_c = \frac{\eta Re}{2R\rho} = \frac{1200 \cdot 0,62 \text{ Pa} \cdot \text{s}}{0,50 \text{ m} \cdot 8,0 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1,86 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Assumendo che v_c rappresenti la velocità del flusso, si ha:

- portata volumetrica $Q = Av_c = \pi R^2 v_c = \pi (0,25 \text{ m})^2 \cdot 1,86 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,365 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

- portata massica $q = \rho Q = 8,0 \cdot 10^2 \cdot 0,365 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 292 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

Il gradiente di pressione si ricava dalla legge di Poiseuille

$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{\Delta p}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{8 \eta Q}{\pi R^4} = 148,5 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

Infine la potenza per unità di lunghezza* si ottiene da:

$$\begin{aligned}\frac{P}{\Delta x} &= \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\Delta x} \quad \text{con} \quad \frac{\vec{F}}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} A = \frac{\Delta p}{\Delta x} \pi R^2 \\ &= \frac{\Delta p}{\Delta x} \pi R^2 \cdot v_c = \frac{\Delta p}{\Delta x} Q = 148,5 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot 0,365 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ &= 53,85 \frac{\text{W}}{\text{m}}\end{aligned}$$

* NOTA: La "potenza per unità di lunghezza" è una grandezza fisica che non è stata discussa a lezione.

Tuttavia, lo studente conosce dalla meccanica che $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

In questo caso, quindi è sufficiente esprimere la relazione "per unità di lunghezza" $\frac{P}{\Delta x} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\Delta x} = \frac{Fv}{\Delta x}$

ed utilizzare, come fatto spesso a lezione, la relazione $F = \Delta p \cdot A$

$$\frac{P}{\Delta x} = \frac{Fv}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} Av = \frac{\Delta p}{\Delta x} Q$$