

Esame di Teoria dei Gruppi — 12.01.26
Laurea Magistrale in Fisica, UniTS, a.a. 2025/2026

Esercizio 1

Si consideri il gruppo simmetrico S_3 delle permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$. Ricordando che una *trasposizione* è una permutazione che scambia due elementi e lascia fissato il terzo, una permutazione si dice *pari* se può essere scritta come composizione di un numero pari di trasposizioni. Si definisca

$$A_3 = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma \text{ è pari}\}.$$

1. Elencare gli elementi di S_3 e indicare quali sono pari e quali dispari.
2. Mostrare che A_3 è un sottogruppo normale di S_3 e determinarne l'ordine.
3. Mostrare che A_3 è isomorfo a un gruppo ciclico.
4. Calcolare il gruppo quoziente S_3/A_3 .

Esercizio 2

1. Dare la definizione di *algebra di Lie complessa*.
2. Dare la definizione di *forma reale* di un'algebra di Lie complessa.
3. I gruppi di Lie $SO(4)$ e $SO(1, 3)$ hanno algebre di Lie reali non isomorfe, ma sono entrambe forme reali della stessa algebra di Lie complessa. Qual è tale algebra di Lie complessa? Disegnarne il diagramma di Dynkin. Spiegare perché le due forme reali non sono isomorfe come algebre di Lie reali.
4. Fissata una base dell'algebra di Lie complessa trovata al punto precedente, spiegare quali combinazioni lineari a coefficienti reali dei generatori permettono di ottenere, rispettivamente, le algebre di Lie reali $\mathfrak{so}(4)$ e $\mathfrak{so}(1, 3)$.

Esercizio 3

Si consideri l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

1. Scrivere il diagramma di Dynkin dell'algebra e determinarne il rango.
2. Costruire il sistema di root semplici e disegnare l'insieme completo delle root nel piano. Dedurre la dimensione dell'algebra (spiegando perché si può dedurre tale dimensione dall'insieme delle roots).
3. Dare una base per l'algebra di Lie, spiegando il legame dei generatori con le root.
4. Usando i Dynkin labels, si costruisca la rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$, dicendo da quali rappresentazioni irriducibili essa è composta.
5. *Facoltativo: Descrivere il gruppo di Weyl di $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, scrivendo quali sono i suoi elementi e mostrando come essi agiscono sulle root semplici.*