

Esame di Teoria dei Gruppi — 10.02.25
Laurea Magistrale Interateneo in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

Sia $G = \mathbb{Z}_6$ il gruppo ciclico degli interi modulo 6, e sia

$$M = \{0, 1, 2\}.$$

Si consideri l'azione di G su M definita da

$$a \cdot m := (m + a) \pmod{3}, \quad a \in G, m \in M.$$

1. Verificare che la mappa definisce un'azione di G su M .
2. Calcolare le orbite $G \cdot m$ per ogni $m \in M$ e stabilire se l'azione è transitiva.
3. Calcolare i gruppi di isotropia

$$G_0, G_1, G_2,$$

e verificarne la cardinalità. Mostrare che vale la relazione

$$|G \cdot m| |G_m| = |G| \quad \text{per ogni } m \in M.$$

4. Fissato $m = 0$, considerare l'applicazione

$$f : G/G_0 \longrightarrow M, \quad f(aG_0) = a0.$$

Mostrare che f è ben definita e biiettiva, e concludere che l'insieme M è naturalmente identificabile con lo spazio dei coset G/G_0 .

Esercizio 2

1. Dare la definizione di algebra di Lie complessa.
2. Definire al forma di Killing. Si dimostri l'identità $\kappa([a, b], c) = \kappa(b, [c, a])$.
3. Dare la definizione di sottoalgebra di Cartan.
4. Come si arriva dall'algebra di Cartan all'insieme delle radici (root)?
5. Dare la definizione di pesi. In che senso le root sono pesi?

Esercizio 3

Si consideri l'algebra di Lie D_2 .

1. Disegnare il diagramma di Dynkin dell'algebra e scrivere la corrispondente matrice di Cartan.
2. Costruire il sistema di root semplici e disegnare l'insieme completo delle root nel piano. Dedurre la dimensione dell'algebra (spiegando perché si può dedurre tale dimensione dall'insieme delle roots).
3. A partire dalle root, scrivere una base per l'algebra di Lie. Scrivere le regole di commutazione tra questi generatori.
4. Usando i Dynkin labels, si costruisca la rappresentazione $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$.
5. Usando la classificazione delle irrep di $sl(2, \mathbb{C})$, si classifichino le rappresentazioni finito-dimensionali di D_2 .
6. *Facoltativo: si trovino almeno tre sottoalgebre $sl(2, \mathbb{C})$ di D_2 , verificando esplicitamente che sono algebre di Lie isomorfe a $sl(2, \mathbb{C})$.*