

Esame di Teoria dei Gruppi — 23.06.26
Laurea Magistrale in Fisica, UniTS, a.a. 2025/2026

Esercizio 1

Siano $N = \mathbb{Z}_3$ e $H = \mathbb{Z}_2$, e si consideri l'applicazione

$$\varphi : H \longrightarrow \text{Aut}(N), \quad \varphi(0)(a) = a, \quad \varphi(1)(a) = -a \pmod{3}.$$

1. Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi.
2. Si consideri il prodotto semidiretto $G = H \ltimes_{\varphi} N$, con il sottogruppo normale N scritto come seconda componente. Scrivere esplicitamente la legge di composizione in G e calcolare l'inverso di un elemento $(\varepsilon, a) \in G$.
3. Posti $r = (0, 1)$ e $s = (1, 0)$, verificare che

$$r^3 = s^2 = e, \quad srs^{-1} = r^{-1},$$

e concludere che G è isomorfo al gruppo simmetrico S_3 . *Suggerimento:* associare r a un 3-ciclo e s a una trasposizione.

Esercizio 2

1. Dare la definizione di algebra di Lie complessa.
2. Dare la definizione di sottoalgebra di Cartan.
3. Definire cosa sono le *roots* e cosa sono le *simple roots*.
4. Definire la matrice di Cartan A_{ij} e spiegare come essa si possa leggere dal diagramma di Dynkin. Fare l'esempio con G_2 .
5. Definire che cos'è una rappresentazione di un'algebra di Lie $\mathcal{G}$. Definire il *quadratic casimir* e dimostrare che commuta con tutti gli elementi dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$.

Esercizio 3

Si consideri l'algebra di Lie D_2 .

1. Disegnare il diagramma di Dynkin dell'algebra e scrivere la matrice di Cartan associata.
2. Costruire il sistema di radici semplici (*simple roots*) e disegnare l'insieme completo delle radici (*roots*) nel piano.
3. A partire dalle radici, scrivere una base dell'algebra di Lie. Scrivere le relazioni di commutazione tra questi generatori.
4. Spiegare quale forma reale dà, per esponenziazione, il gruppo di Lorentz.
5. Definire l'algebra di Clifford e spiegare come da essa si possano estrarre le due rappresentazioni spinoriali di D_2 .
6. Spiegare come mai le rappresentazioni spinoriali sono indicate con i simboli $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$.
7. Costruire le rappresentazioni $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ usando i Dynkin label.
8. *Facoltativo: costruire la matrice 4×4 di un boost di Lorentz a partire dalla rappresentazione bidimensionale di tale gruppo. (Suggerimento: usare una rappresentazione matriciale del quadrivettore.)*