

Esame di Teoria dei Gruppi — 13.07.26
Laurea Magistrale in Fisica, UniTS, a.a. 2025/2026

Esercizio 1

Sia G un gruppo. Si definisce *centro* di G il sottoinsieme

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ per ogni } h \in G\}.$$

1. Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G .
2. Si consideri ora il gruppo diedrale D_4 delle simmetrie del quadrato. I suoi elementi sono

$$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\},$$

dove r è una rotazione di angolo $\pi/2$ e s è una riflessione. La composizione è determinata da

$$r^4 = e, \quad s^2 = e, \quad sr^k = r^{-k}s \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Calcolare esplicitamente il centro $Z(D_4)$. *Suggerimento:* ogni elemento di D_4 si può scrivere nella forma r^a oppure nella forma $r^b s$, con $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Imporre che un elemento di una di queste due forme commuti con tutti gli elementi r^c e $r^d s$, con $c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$, e determinare per quali valori di a oppure di b questo è possibile.

3. Determinare il gruppo quoziente $D_4/Z(D_4)$, scrivendone gli elementi e identificandolo, a meno di isomorfismo, con un gruppo noto.

Esercizio 2

1. Dare la definizione di algebra di Lie complessa.
2. Dare la definizione di rappresentazione di un'algebra di Lie. Dire quando questa rappresentazione si dice irriducibile o riducibile.
3. Definire il *quadratic casimir* e dimostrare che commuta con tutti gli elementi dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$.

Esercizio 3

Si consideri l'algebra di Lie D_2 .

1. Disegnare il diagramma di Dynkin dell'algebra e scrivere la matrice di Cartan associata.
2. Costruire il sistema di radici semplici (*simple roots*) e disegnare l'insieme completo delle radici (*roots*) nel piano.
3. A partire dalle radici, scrivere una base dell'algebra di Lie. Scrivere le relazioni di commutazione tra questi generatori.
4. Spiegare quale forma reale dà, per esponenziazione, il gruppo di Lorentz.
5. Definire l'algebra di Clifford su uno spazio 4-dimensional di Minkowski (segnatura $+-$).
6. Si prenda la base in cui le matrici gamma hanno la forma a blocchi

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{with } i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

where σ^i ($i = 1, 2, 3$) sono le tre matrici di Pauli. Mostrare che soddisfano l'algebra di Clifford.

7. Usando le matrici gamma, si possono definire delle matrici 4×4 che rappresentano i generatori del gruppo di Lorentz? Se sì, come?
8. La rappresentazione trovata al punto precedente è irriducibile o riducibile? Usare le matrici nella forma (1) per giustificare la risposta.
9. Dire in quali (o quale) irrep di D_2 si decompone la rappresentazione 4-dimensionale data dalle matrici gamma.
10. *Facoltativo: costruire la matrice 4×4 di un boost di Lorentz a partire dalla rappresentazione bidimensionale di tale gruppo. (Suggerimento: usare una rappresentazione matriciale del quadrivettore.)*