



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE**



Dipartimento di

Fisica

Dipartimento d'Eccellenza 2023-2027

SOLUZIONI DELLE ESERCITAZIONI DI TERMODINAMICA E FLUIDODINAMICA (E ONDE)

Esercitatore: dott. Davide Fuligno
a.a. 2025/26

Indice

1	TERMODINAMICA	1
1.1	Esercitazione 1 - 16 marzo 2026	1
1.2	Esercitazione 2 - 24 marzo 2026	4
1.3	Esercitazione 3 - 30 marzo 2026	7
1.4	Esercitazione 4 - 13 aprile 2026	12
1.5	Esercitazione 5 - 20 aprile 2026	16
1.6	Esercitazione 6 - 28 aprile 2026	21
2	FLUIDODINAMICA	25
2.1	Esercitazione 7 - 07 maggio 2026	25
2.2	Esercitazione 8 - 18 maggio 2026	28

1 TERMODINAMICA

1.1 Esercitazione 1 - 16 marzo 2026

1. a) Partendo dall'equazione di stato dei gas perfetti, l'unico parametro non noto nello stato iniziale risulta essere il numero di moli.

$$p_0 V_0 = n R T_0 \rightarrow n = \frac{p_0 V_0}{R T_0}$$

Usando i valori forniti (opportunamente convertiti) si ha:

$$n = \frac{1 \text{ atm} \times 2 \text{ L}}{0.0821 \text{ L} \cdot \text{atm} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \times 300 \text{ K}} = \frac{101300 \text{ Pa} \times 0.002 \text{ m}^3}{8.3145 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \times 300 \text{ K}} = 0.081 \text{ mol}$$

- b) La trasformazione è quasi-statica a pressione costante. Il lavoro compiuto dal gas può quindi essere calcolato come

$$L = p_0 \Delta V = p_0 (V_1 - V_0) = 101300 \text{ Pa} \times 0.0005 \text{ m}^3 = 51 \text{ J}$$

- c) Per determinare il calore assorbito è necessario utilizzare il primo principio della termodinamica. Trattandosi di un gas monoatomico, dalla teoria cinetica dei gas, sappiamo che la variazione di energia interna dipende solo dalla variazione di temperatura. Calcoliamo quindi la temperatura nello stato finale:

$$T_1 = \frac{p_0 V_1}{n R} = \frac{101300 \text{ Pa} \times 0.0025 \text{ m}^3}{0.081 \text{ mol} \times 8.3145 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K})} = 376 \text{ K} = 103^\circ \text{C}$$

Da cui $\Delta T = 76 \text{ K}$.

Quindi la differenza di energia interna è

$$\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T = 1.5 \times 0.081 \text{ mol} \times 8.3145 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \times 76 \text{ K} = 76 \text{ J}$$

Quindi dal primo principio $\Delta U = Q - L$ si ricava il calore assorbito:

$$Q = \Delta U + L = (51 + 76) \text{ J} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ J}$$

2. a) Poiché la molla è in condizione di equilibrio, la risultante delle forze agenti su di essa è nulla. La forza esterna applicata sul pistone 1 sarà quindi uguale alla forza applicata dal gas sul pistone 2, ottenibile moltiplicando la pressione del gas per la superficie del pistone. Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava quindi la pressione del gas:

$$p_A = n R \frac{T_A}{V_A} = 2 \text{ atm}$$

E conseguentemente la forza esercitata dal gas avrà modulo

$$f = p_A S = 8.11 \times 10^3 \text{ N}$$

La forza esterna avrà lo stesso modulo è quindi $F = f = 8.11 \times 10^3 \text{ N}$. Questo stesso ragionamento vale anche considerando le forze applicate a un estremo della molla, quindi anche la forza elastica esercitata dalla molla avrà un valore in modulo pari a f . Si può quindi calcolare la compressione della molla come

$$\Delta x = f/k = 0.101 \text{ m}$$

- b) Il lavoro L è stato speso in parte per comprimere la molla da Δx a $\Delta x + d_1 - d_2$. La parte restante L_A invece è servita per comprimere il gas:

$$L_A = L - \frac{1}{2}k[(\Delta x + d_1 - d_2)^2 - (\Delta x)^2] = 345 \text{ J}$$

Per il gas la trasformazione è una trasformazione adiabatica irreversibile, quindi non c'è trasferimento di calore e dal primo principio sappiamo che $\Delta U = L$ (il segno positivo è perché stiamo considerando la forza subita dal gas durante la trasformazione e non quella esercitata dallo stesso, che è uguale ma con segno opposto). Inoltre trattandosi di un gas monoatomico, dalla teoria cinetica dei gas sappiamo che la variazione di energia interna dipende solo dalla variazione di temperatura, quindi possiamo ricavare la temperatura finale:

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_A^* - T_A) = L_A \rightarrow T_A^* = T_A + \frac{L_A}{\frac{3}{2}nR} = 301 \text{ K}$$

Invece il volume finale del gas è $V_A^* = V_A - d_2 S = 9.2 \text{ L}$ e quindi la pressione finale risulta di

$$P_A^* = \frac{nRT_A^*}{V_A^*} = 2.7 \text{ atm}$$

3. a) Prima di aprire il rubinetto, i due gas occupano lo stesso volume iniziale V_0 e si trovano alla stessa pressione p_0 . Dall'equazione di stato dei gas perfetti possiamo quindi ricavare il rapporto fra il numero di moli dei due gas, che poi useremo per ricavare il rapporto in massa.

$$p_0 V_0 = n_1 R T_1 \quad p_0 V_0 = n_2 R T_2$$

$$\rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Indicando ora con M_1 e M_2 i pesi molecolari dei due gas e con m_1 ed m_2 le loro masse, abbiamo che:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1 M_1}{n_2 M_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{T_2}{T_1} = 1.22$$

- b) Prima di trovare la temperatura di equilibrio dobbiamo capire cosa succede dopo aver aperto il rubinetto. I due gas si espandono rapidamente e adiabaticamente e senza che venga eseguito lavoro. Dal primo principio abbiamo quindi una situazione in cui $Q = 0$ e $L = 0$ e quindi anche $\Delta U = 0$. Dalla teoria cinetica sappiamo che $U \propto T$ e quindi quando i due gas si espandono la loro temperatura rimane costante. Dopo l'espansione ciascuno dei due gas occupa un volume $2V_0$ doppio rispetto a quello iniziale, ed essendo rimasto alla stessa temperatura sappiamo che ha una pressione $p_0/2$ dimezzata rispetto a quella iniziale. Ora possiamo considerare il trasferimento di calore dal gas caldo a quello freddo fino a raggiungere la temperatura di equilibrio. I due gas non compiono lavoro, quindi la variazione di energia interna di ciascuna dei due sarà uguale al calore scambiato fra i due gas.

Per trovare la temperatura di equilibrio è quindi sufficiente eguagliare il calore assorbito da un gas a quello ceduto dall'altro e calcolarli grazie alla variazione di energia interna, chiamando T_0 la temperatura di equilibrio.

$$\Delta U_1 = Q_{\text{ass}} = c_1 n_1 (T_0 - T_1)$$

$$-\Delta U_2 = Q_{\text{ced}} = c_2 n_2 (T_2 - T_0)$$

Dalla teoria cinetica si è visto che per gas monoatomici $c = 3/2 R$ ed è uguale per tutti i gas monoatomici. Per i gas biatomici il valore di c è diverso ma uguale per tutti i gas biatomici. Essendo quindi entrambi i gas biatomici, $c_1 = c_2$ e quindi la nostra uguaglianza diventa:

$$n_2 (T_2 - T_0) = n_1 (T_0 - T_1)$$

Nel punto a) abbiamo visto che $n_1/n_2 = T_2/T_1$, quindi possiamo sostituire nell'equazione e ottenere:

$$T_1 (T_2 - T_0) = T_2 (T_0 - T_1)$$

Da cui si ottiene:

$$T_0 = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 303 \text{ K} = 30^\circ \text{C}$$

c) Le pressioni finali dei due gas si ricavano dall'equazione di stato:

$$\frac{p_1}{p_0/2} = \frac{T_0}{T_1} \rightarrow p_1 = \frac{p_0 T_0}{2T_1} = p_0 \frac{T_2}{T_1 + T_2}$$

Analogamente per il secondo gas:

$$p_2 = \frac{p_0 T_0}{2T_2} = p_0 \frac{T_1}{T_1 + T_2}$$

E quindi la pressione finale della miscela è di:

$$p = p_1 + p_2 = p_0$$

1.2 Esercitazione 2 - 24 marzo 2026

1. a) La temperatura della Terra è determinata dalla quantità di calore che essa riceve per irraggiamento e da quella che la terra stessa irradia. In condizioni di equilibrio le due quantità sono uguali.
Indicando con r il raggio della Terra, la quantità di calore per unità di tempo che riceve dal sole è¹

$$Q_1 = W\pi r^2$$

E supponendo che la temperatura sulla Terra sia costante, il calore emesso dalla Terra per unità di tempo è

$$Q_2 = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

Ponendo $Q_1 = Q_2$ si ottiene

$$T^4 = \frac{W}{4\sigma} \rightarrow T = \left(\frac{W}{4\sigma}\right)^{1/4}$$

E quindi sostituendo si ottiene $T = 277.2 \text{ K} = 4^\circ\text{C}$.

- b) Usiamo gli indici M, T ed S per i dati di Mercurio, Terra e Saturno.
L'energia emessa dal sole nell'unità di tempo è costante, quindi al variare della distanza dal sole, per la conservazione dell'energia, abbiamo che

$$4\pi W_M d_M^2 = 4\pi W_T d_T^2 = 4\pi W_S d_S^2$$

Da questa otteniamo che

$$W_M = W_T \left(\frac{d_T}{d_M}\right)^2 \qquad W_M = W_T \left(\frac{d_T}{d_S}\right)^2$$

E sostituendo:

$$W_M = 6381 \text{ W/m}^2 \qquad W_S = 13.65 \text{ W/m}^2$$

Usando questi valori nell'equazione trovata nel punto a) per la temperatura si ottiene:

$$T_M = 409 \text{ K} \qquad T_S = 88 \text{ K}$$

2. a) Essendo le trasformazioni adiabatiche caratterizzate dal fatto che $\delta Q = 0$, occorre scrivere una espressione di δQ per un gas che segue l'equazione di Van der Waals.

Per farlo, risulta più semplice partire dalla formulazione esplicita di $p = p(V, T)$ rispetto alla funzione $V = V(p, T)$. Useremo quindi come variabili indipendenti volume e temperatura, e come da suggerimento possiamo scrivere l'equazione differenziale del calore:

$$\delta Q = n c_V dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

¹ πr^2 e non $4\pi r^2$ perché stiamo considerando ciò che riceve dal sole, considerando quindi la sezione trasversa

Dall'equazione di Van Der Waals, isolando la pressione otteniamo:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

E quindi possiamo calcolare la derivata parziale:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V - nb}$$

L'equazione del calore diventa:

$$\delta Q = nc_V dT + \frac{nRT}{V - nb} dV$$

Ora possiamo imporre la condizione che la trasformazione sia adiabatica $\delta Q = 0$ e otteniamo:

$$\frac{c_V}{R} \frac{dT}{T} + \frac{d(V - nb)}{V - nb} = 0$$

Integrando si ottiene quindi

$$\ln(T^{c_V/R}) + \ln(V - nb) = \text{cost}$$

E quindi l'equazione delle adiabatichhe reversibili per i gas reali è:

$$T^{c_V/R}(V - nb) = \text{cost}$$

- b) Per ottenere l'energia interna partiamo dal primo principio della termodinamica in forma differenziale

$$\delta Q = dU + p dV$$

E scrivendo $p = p(V, T)$ e con l'equazione del calore trovata nel punto a) otteniamo:

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V - nb} dV = dU + \left(\frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}\right) dV$$

E risolvendo rispetto a dU

$$dU = nc_V dT + \frac{an^2}{V^2} dV$$

E integrando, a meno di una costante, si ottiene quindi l'energia interna:

$$U = nc_V T - \frac{an^2}{V}$$

Da notare che, come ci aspettiamo, il caso particolare del gas perfetto si ottiene per $a = 0$.

- c) Quando un gas reale si espande adiabaticamente nel vuoto, sappiamo essere nulli il calore scambiato e il lavoro compiuto, e dal primo principio risulta quindi nulla la variazione di energia interna.

Visto che il volume aumenta, il termine an^2/V diminuisce, e ne consegue che U può restare costante solo se diminuisce anche la temperatura.

3. a) Partiamo considerando il sistema $A + B$, che è un sistema chiuso da pareti adiabatiche, incluso il pistone, e quindi non scambia calore con l'esterno. Ne consegue che applicando il primo principio sul sistema intero avremo che $\Delta U = Q_{tot} - L_{tot} = -L_{tot}$.

Essendo fisso il setto che separa A e B , durante tutta la trasformazione A resta a volume costante, quindi non compie lavoro e $L_{tot} = L_B$. Inoltre, essendo il setto diatermico e la trasformazione reversibile, abbiamo che per tutta la trasformazione i due gas sono in equilibrio termico fra loro e quindi

$$T_A = T_B = T$$

Inoltre, dalla teoria cinetica dei gas, per gas perfetti monoatomici possiamo scrivere la variazione di energia interna come

$$dU_{tot} = n_{tot}c_V dT = (x + n_B)\frac{3}{2}RdT$$

E da quanto appena detto possiamo scrivere il lavoro infinitesimo come

$$dL_{tot} = dL_B = p_B dV_B$$

e scrivendo $p_B = p(V_B, T)$ usando l'equazione dei gas perfetti e sapendo che $\delta Q = 0$, possiamo scrivere il primo principio come:

$$(x + n_B)\frac{3}{2}RdT + \frac{n_B RT}{V_B}dV_B = 0$$

Separando le variabili otteniamo:

$$\frac{3}{2}(x + n_B)\frac{dT}{T} + n_B\frac{dV_B}{V_B} = 0$$

E integrando

$$\frac{3}{2}(x + n_B) \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T} dT + n_B \int_{V_0}^{4V_0} \frac{1}{V_B} dV_B = 0$$

$$\frac{3}{2}(x + n_B) \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + n_B \ln\left(\frac{4V_0}{V_0}\right) = 0$$

E quindi risolvendo per x troviamo il numero di moli:

$$x = \frac{2n_B \ln(4)}{3 \ln(T_i/T_f)} - n_B = 4.1 \text{ mol}$$

- b) Ora che abbiamo il numero di moli possiamo calcolare il lavoro totale usando la variazione di energia interna:

$$\begin{aligned} L_{tot} &= -\Delta U_{tot} = -(x + n_B)\frac{3}{2}R(T_f - T_i) \\ &= \left[\frac{2n_B \ln(4)}{3 \ln(T_i/T_f)} \right] \frac{3}{2}R(T_i - T_f) = 3.2 \cdot 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

1.3 Esercitazione 3 - 30 marzo 2026

1. a) La temperatura interna è maggiore di quella esterna, quindi il climatizzatore funziona come pompa di calore.
La potenza dissipata per conduzione attraverso le pareti è di

$$P_{\text{diss}} = K \frac{S}{D} (T_i - T_e) = 5.2 \text{ kW}$$

Il climatizzatore non deve compensare tutta questa potenza dissipata perché è aiutato dall'esistenza di un'altra fonte di calore interna alla stanza: gli studenti e i computer. Questi producono

$$P_{\text{gen}} = 10 \cdot (100 + 150) \text{ W} = 2.5 \text{ kW}$$

Quindi la macchina termica deve produrre

$$Q_i / \Delta t = P_{\text{diss}} - P_{\text{gen}} = 2.7 \text{ kW}$$

Dal coefficiente di prestazione sappiamo che

$$\omega = \frac{Q_i / \Delta t}{W}$$

con W la potenza elettrica che il climatizzatore deve assorbire.

Essendo il climatizzatore una macchina di Carnot reversibile sappiamo che il coefficiente di prestazione dipende dalle temperature fra cui opera la macchina ed in particolare vale:

$$\omega = \frac{T_i}{T_i - T_e}$$

Quindi la potenza elettrica necessaria vale:

$$W = \frac{Q_i / \Delta t}{\omega} = (P_{\text{diss}} - P_{\text{gen}}) \frac{T_i - T_e}{T_i} = 119 \text{ W}$$

- b) Nel secondo caso non ci sono fonti di calore interne alla stanza, quindi il calore generato dal climatizzatore deve compensare solo il calore dissipato per conduzione.

$$P_{\text{gen}} = 0 \rightarrow Q_i / \Delta t = P_{\text{diss}}$$

E quindi usando gli stessi calcoli del punto a) si ottiene

$$W = P_{\text{diss}} \frac{T_i - T_e}{T_i} = 229 \text{ W}$$

2. a) La trasformazione **AB** è un'isobara irreversibile: la pressione è costante, il volume raddoppia e quindi dall'equazione di stato dei gas perfetti sappiamo che anche la temperatura (in Kelvin) raddoppia.

$$V_B = 2V_A \rightarrow T_B = 2T_A = 546 \text{ K}$$

Il fatto che sia una trasformazione irreversibile ci impedisce di ragionare su quello che succede istante per istante, ma possiamo comunque sfruttare il fatto che l'energia interna sia funzione di stato: la trasformazione **AB** causerà al gas la stessa variazione di energia interna indipendentemente dal percorso che è stato compiuto per arrivare da **A** a **B**, sia esso reversibile o irreversibile.

Dalla teoria cinetica sappiamo che vale:

$$\Delta U_{AB} = n c_v \Delta T = \frac{5}{2} n R (T_B - T_A) = 17 \text{ kJ}$$

Non possiamo calcolare il lavoro come integrale lungo un percorso perché è una trasformazione irreversibile, ma avendo potuto calcolare la variazione di energia interna e sapendo il calore assorbito durante la trasformazione, è possibile usare il primo principio della termodinamica per determinare il lavoro compiuto:

$$L_{AB} = Q_{AB} - \Delta U_{AB} = 5.0 \text{ kJ}$$

Guardiamo ora alla trasformazione **BC**. È una trasformazione adiabatica quindi non c'è scambio di calore. Sappiamo che

$$V_C = 3V_A = \frac{3}{2} V_B$$

E per le adiabatiche vale la relazione

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \rightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = 465 \text{ K}$$

E dal primo principio possiamo calcolarci il lavoro partendo dalla variazione di energia interna:

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -n c_v (T_C - T_B) = 5.1 \text{ kJ}$$

La trasformazione **CD** è una isobara reversibile, quindi possiamo calcolarci il lavoro integrando $p dV$:

$$L_{CD} = p \Delta V = p V_D - p V_C = n R T_D - n R T_C = n R \Delta T_{CD} = -4.8 \text{ kJ}$$

Infine la trasformazione **DA** è una isoterma reversibile, quindi possiamo calcolare il lavoro come

$$L_{DA} = n R T_A \ln(V_A/V_D) = n R T_A \ln(P_D/P_A)$$

Dove possiamo calcolarci la pressione in D rispetto a quella in A usando le relazioni della trasformazione adiabatica **BC**:

$$P_D = P_C = P_B \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma} = P_A \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma}$$

E quindi il lavoro della isoterma risulta:

$$L_{DA} = n R T_A \gamma \ln(V_B/V_C) = -3.9 \text{ kJ}$$

Quindi il lavoro totale compiuto dal ciclo risulta di

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 1.4 \text{ kJ}$$

b) Per calcolare il rendimento del ciclo possiamo usare

$$\eta = L/Q_{ass}$$

Dove il calore assorbito è solo quello della trasformazione **AB**. Infatti l'espansione **BC** è adiabatica, e nelle altre trasformazioni il gas cede calore. Quindi usando i dati forniti e i conti del punto a) otteniamo

$$\eta = L/Q_{AB} = 6.5\%$$

c) se la trasformazione **AB** fosse reversibile, possiamo calcolare il lavoro della trasformazione integrando pdV e possiamo ricavare il calore assorbito dal primo principio:

$$L'_{AB} = p_A \Delta V = nR(2T_A - T_A) = nRT_A = 6.8 \text{ kJ}$$

$$Q'_{AB} = \Delta U_{AB} + L'_{AB} = 23.8 \text{ kJ}$$

E quindi il lavoro totale diventa $L' = 3.3 \text{ kJ}$ e il rendimento

$$\eta' = \frac{L'}{Q'_{AB}} = 14\%$$

d) La temperatura minima del ciclo è T_A mentre la temperatura massima è $T_B = 2T_A$. Quindi l'efficienza di un ciclo di Carnot operante fra queste temperature risulta di

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{2} = 50\%$$

3. a) Per calcolare il rendimento possiamo guardare calore assorbito e calore ceduto durante il ciclo. Avendo due trasformazioni adiabatiche, l'unica trasformazione in cui il sistema assorbe calore è l'espansione isobara, mentre l'unica trasformazione in cui il sistema cede calore è quella isocora. Sono tutte trasformazioni reversibili, quindi in termini generali possiamo calcolare i calori di queste trasformazioni:

$$Q_2 \text{ per la trasformazione isobara da } T_2 \text{ a } T_3: Q_2 = nc_p(T_3 - T_2)$$

$$Q_4 \text{ per la trasformazione isocora da } T_4 \text{ a } T_1: Q_4 = nc_v(T_1 - T_4)$$

E quindi l'efficienza generale di un ciclo di Diesel è di:

$$\eta = 1 + \frac{Q_4}{Q_2} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{\gamma(T_3 - T_2)}$$

Dove è stata usata la relazione $\gamma = c_p/c_v$. È quindi sufficiente trovare le temperature a cui opera il ciclo per trovare l'efficienza.

Alla fine della compressione adiabatica il gas avrà una temperatura di

$$T_2 = T_1(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_1 r^{\gamma-1} = 953 \text{ K}$$

Nella espansione isobara sappiamo che vale

$$V_2/T_2 = V_3/T_3$$

E possiamo quindi definire il rapporto di cut-off α come

$$\alpha = V_3/V_2 = T_3/T_2 = 2.1$$

Questo ci serve solo per semplificare i conti e toglierci di mezzo i volumi, visto che ci interessano solo le temperature del ciclo.

Nell'espansione adiabatica possiamo usare la stessa relazione di prima fra temperature e volumi:

$$T_4 = T_3(V_3/V_4)^{\gamma-1}$$

E possiamo scrivere riscrivere il rapporto fra i volumi come

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{\alpha}{r}$$

E quindi

$$T_4 = T_3(\alpha/r)^{\gamma-1} = 847 \text{ K}$$

Inserendo quindi tutte le temperature nella formula precedentemente trovata, si ottiene un rendimento di

$$\eta = 62.6\%$$

- b) Il comportamento limite per il ciclo Diesel, che opera fra le temperature T_3 e T_1 , non si ha per r che tende ad infinito, perché la condizione limite è quella in cui la temperatura raggiunta alla fine della compressione adiabatica sia la temperatura massima T_3 . Quindi il limite corretto è $T_2 \rightarrow T_3$ o, sfruttando la definizione di α

$$\alpha \rightarrow 1$$

Scriviamo quindi tutte le temperature precedentemente calcolate in funzione di T_1 :

$$T_1 = T_1$$

$$T_2 = T_1 r^{\gamma-1}$$

$$T_3 = \alpha T_2 = \alpha T_1 r^{\gamma-1}$$

$$T_4 = T_3(\alpha/r)^{\gamma-1} = (\alpha T_1 r^{\gamma-1}) \cdot (\alpha/r)^{\gamma-1} = \alpha^\gamma T_1$$

E quindi scrivendo il rendimento come funzione di α ed r otteniamo:

$$\eta = 1 - \frac{\alpha^\gamma T_1 - T_1}{\gamma(\alpha T_1 r^{\gamma-1} - T_1 r^{\gamma-1})} = 1 - \frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

E facendo il limite per $\alpha \rightarrow 1$, abbiamo che la componente dipendente da α tende a 1 (verificare per esercizio), mentre r tenderà al valore massimo, ossia quello in cui T_2 sarà uguale a T_3 .

Dalle relazioni delle adiabatiche sappiamo che $T_2 = T_1 r^{\gamma-1}$ e quindi se T_2 tende a T_3 avremo che il massimo valore di r consentito sarà $r^{\gamma-1} = T_3/T_1$. Sostituendo tutto nel rendimento abbiamo quindi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \eta = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Che è proprio il rendimento di una macchina di Carnot operante fra le temperature minime e massime del ciclo. Risulta quindi chiaro che all'aumentare del rapporto di compressione aumenta il rendimento del ciclo, ma allo stesso tempo nel caso limite il ciclo corrisponde ad una trasformazione adiabatica percorsa in ambo i versi, e quindi non viene prodotto alcun lavoro. Il rendimento massimo di un ciclo di Diesel corrisponde quindi a quello di un ciclo di Carnot ma solo a livello ideale, poiché sarebbe un ciclo inutilizzabile per produrre lavoro.

1.4 Esercitazione 4 - 13 aprile 2026

1. a) Caso: gas perfetto, espansione isoterma reversibile

La variazione di entropia del gas si calcola sfruttando il fatto che la trasformazione avviene a temperatura costante:

$$\Delta S_{gas} = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln(V_f/V_i)}{T} = nR \ln(\alpha)$$

Trattandosi di una trasformazione reversibile la variazione dell'entropia dell'Universo è nulla.

b) Caso: gas perfetto, espansione libera

Nel caso di espansione libera, il gas non compie/subisce alcun lavoro e non scambia calore. Quindi la variazione di energia interna è nulla, e per un gas perfetto questo implica che anche la variazione di temperatura del gas è nulla.

Essendo l'entropia una funzione di stato, la variazione di entropia del gas dipende solo dal punto di partenza e da quello di fine e non dal percorso. Si può quindi calcolare questa lungo un percorso reversibile, che in questo caso è proprio quello di una trasformazione isoterma. La variazione di entropia del gas è quindi la stessa del punto a), e non essendoci stato scambio di calore con l'ambiente, la variazione di entropia di questo risulta nulla. Quindi:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} = nR \ln(\alpha) > 0$$

c) Caso: gas reale, espansione isoterma reversibile

Nell'esercitazione n.2 si è visto come ricavare il valore di δQ per un gas reale che obbedisce all'equazione di Van der Waals, e vale:

$$\delta Q = n c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

Trattandosi di un'isoterma $dT = 0$, quindi

$$\delta Q = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

E per l'entropia

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

Dall'equazione di stato del gas reale si calcola la derivata parziale:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V - bn^2}$$

Da cui

$$\Delta S_{gas} = \int_{V_i}^{V_f} nR \frac{dV'}{V' - bn^2} = nR \ln \left(\frac{V_f - bn^2}{V_i - bn^2} \right)$$

Come nel caso del gas reale, essendo una trasformazione reversibile la variazione di entropia dell'universo sarà nulla.

d) **Caso: gas reale, espansione libera**

Nel caso di un gas reale, sappiamo che l'energia interna non dipende solo dalla temperatura, in particolare vale

$$U = n c_v T - \frac{a n^2}{V} = U(V, T)$$

Quindi, anche se l'espansione libera non fa variare l'energia interna, la temperatura del gas reale varia (ed in particolare $T_f < T_i$). Ne emerge che, a differenza del caso dei gas perfetti, le trasformazioni isoterme non coincidono con le trasformazioni isoenergetiche. Per calcolare la variazione di entropia del gas andrebbe quindi scelto un opportuno percorso reversibile che porti allo stesso stato finale ottenuto nell'espansione libera (ad esempio scrivendo esplicitamente l'equazione delle isoenergetiche dei gas reali e calcolando la variazione di entropia lungo una isoenergetica reversibile). Come per il gas perfetto, la variazione dell'entropia dell'universo sarà nulla e pari alla sola variazione di entropia del gas, non essendo stato scambiato calore con l'ambiente:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} > 0$$

2. a) Partiamo completando le informazioni sugli stati B e D.

La trasformazione BC è isocora, quindi

$$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C} \rightarrow T_B = 133 \text{ K}$$

La trasformazione AB è isobara, quindi il volume è proporzionale alla temperatura:

$$V \propto T \rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{2}{3} \rightarrow V_B = \frac{2}{3} V_A = V_C$$

In modo analogo, la trasformazione CD è isobara e quindi possiamo ricavarci la temperatura nel punto D

$$\frac{T_D}{T_C} = \frac{V_D}{V_C} = \frac{3}{2} \rightarrow T_D = T_A \frac{3}{2} = 300 \text{ K}$$

Visto che vogliamo calcolare il rendimento del ciclo, partiamo calcolando il lavoro compiuto.

Le isocore non compiono lavoro, quindi devo solo considerare le due trasformazioni isobare reversibili:

$$L_{AB} = nR(T_B - T_A) = -1.11 \text{ kJ}$$

$$L_{CD} = nR(T_D - T_C) = +1.66 \text{ kJ}$$

E quindi

$$L = L_{AB} + L_{CD} = 0.55 \text{ kJ}$$

Il calore viene assorbito lungo due trasformazioni: BC e CD.

BC è isocora quindi

$$Q_{BC} = n c_v (T_C - T_B) = 2.77 \text{ kJ}$$

Mentre CD è isobara quindi

$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C) = 5.82 \text{ kJ}$$

Quindi il calore totale assorbito è di $Q_{ass} = 8.59 \text{ kJ}$ e il rendimento è

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = 6.45\%$$

- b) Il contributo alla variazione di entropia dell'universo delle trasformazioni reversibili è nullo. Possiamo quindi considerare la sola trasformazione DA irreversibile.

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{serb}$$

Per il gas, possiamo porci su un cammino reversibile e quindi

$$\Delta S_{gas} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_A}{T_D} = -16.9 \text{ J/K}$$

Il serbatoio invece assorbe il calore a temperatura costante, e per un'isocora il calore totale scambiato non dipende dalla reversibilità della trasformazione (l'energia interna è funzione di stato, il lavoro è nullo, quindi il calore è sempre uguale alla variazione di energia interna):

$$\Delta S_{serb} = \frac{Q}{T} = \frac{nc_v \Delta T}{T_A} = 20.8 \text{ J/K}$$

Quindi $\Delta S_U = 3.9 \text{ J/K}$

- c) La temperatura minima raggiunta dal ciclo è $T_B = (2/3)T_A$ e quella massima è di $T_D = (3/2)T_A$. Quindi il rendimento del ciclo di carnot equivalente è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_B}{T_D} = 1 - \frac{4}{9} = 55.6\%$$

3. a) L'universo termodinamico da considerare in questo problema è fatto da 3 elementi: l'acqua, il serbatoio usato per scaldarla, e l'ambiente (ossia il serbatoio usato per raffreddarla).

Sapendo il volume d'acqua, possiamo ricavare la massa di questa come $m = \rho/V = 0.2 \text{ Kg}$.

Il calore scambiato vale, nella formula generica:

$$Q = mc_s \Delta T$$

E nella formulazione differenziale

$$\delta Q = mc_s dT$$

Essendo l'entropia funzione di stato, per calcolare la variazione di entropia dell'acqua, possiamo sempre considerare un cammino fittizio reversibile con $\delta Q_{rev} = mc_s dT$. Quindi:

$$\Delta S_{acqua} = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_s dT}{T} = mc_s \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc_s \ln \frac{T_f}{T_i}$$

Per i serbatoi, che per definizione sono a temperatura costante, invece vale

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q}{T} = \frac{-mc_s \Delta T}{T_{serb}}$$

Ora che abbiamo tutti gli elementi possiamo calcolare la variazione di entropia dell'universo lungo le due trasformazioni.

Per il riscaldamento abbiamo:

$$Q_1 = mc_s(T_2 - T_1) = 5.86 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta S_{acqua} = mc_s \ln \frac{T_2}{T_1} = +179 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q_1}{T_2} = -102 \text{ J/K}$$

E quindi la variazione di entropia dell'universo del processo di riscaldamento è $\Delta S_{U,1} = +77 \text{ J/K}$

Per il raffreddamento nel primo caso, abbiamo

$$Q_2 = mc_s(T_3 - T_2) = -4.19 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta S_{acqua} = mc_s \ln \frac{T_3}{T_2} = -124 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q_2}{T_1} = 143 \text{ J/K}$$

E quindi $\Delta S_{U,2} = +19 \text{ J/K}$ e la variazione di entropia dell'universo per aver fatto un tè risulta di

$$\Delta S_U = \Delta S_{U,1} + \Delta S_{U,2} = 96 \text{ J/K}$$

- b) La parte del riscaldamento resta invariata, va quindi ricalcolata la variazione di entropia per il raffreddamento del tè fino alla nuova temperatura finale:

$$Q'_2 = mc_s(T_1 - T_2) = -5.86 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta S'_{acqua} = mc_s \ln \frac{T_1}{T_2} = -179 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q'_2}{T_1} = +200 \text{ J/K}$$

E quindi $\Delta S'_{U,2} = +21 \text{ J/K}$ e la variazione di entropia dell'universo per aver fatto raffreddare il tè fino a temperatura ambiente risulta di

$$\Delta S_U = \Delta S_{U,1} + \Delta S'_{U,2} = 98 \text{ J/K}$$

1.5 Esercitazione 5 - 20 aprile 2026

1. a) Caso 1: corpi messi a contatto diretto

Per trovare la temperatura di equilibrio si eguagliano i calori scambiati dai due corpi:

$$C(T_2 - T_f) = C(T_f - T_1)$$

Da cui

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = 50^\circ\text{C} = 323\text{ K}$$

Essendo i due corpi in un contenitore adiabatico, questi non interagiscono con l'ambiente ma solo fra loro. Quindi la variazione di entropia dell'universo sarà data dalla somma della variazione di entropia dei singoli corpi. Per un corpo a capacità termica costante la variazione di entropia vale

$$\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$$

e quindi nel nostro caso:

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f}{T_1} + C \ln \frac{T_f}{T_2} = C \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 12.1\text{ J/K}$$

b) Caso 2: scambio tramite motore termico reversibile

Visto che lo scambio di calore avviene tramite una macchina reversibile, la variazione di entropia dell'universo sarà nulla. Si può quindi partire dal calcolo effettuato nel punto a) e ricavare T_f imponendo nulla ΔS_U :

$$\Delta S_U = C \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 0 \rightarrow \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 1 \rightarrow T_f = \sqrt{T_1 T_2} = 319\text{ K} = 46^\circ\text{C}$$

Per calcolare il lavoro compiuto dalla macchina termica è utile considerare l'intero sistema (due corpi + macchina termica) e usare il primo principio: il sistema è posto in un contenitore adiabatico (tutti gli scambi di calore sono interni quindi sommandoli si annullano), la variazione di energia interna è data dalla somma delle variazioni di energia interna dei due corpi e il lavoro è quello compiuto dalla macchina.

$$L = -\Delta U_{\text{sist}} = -\Delta U_1 - \Delta U_2$$

Va quindi calcolata la variazione di energia interna per i due corpi. Questi sono considerabili rigidi quindi $dL = 0$ e quindi dal primo principio vale:

$$dU = \delta Q = C dT \rightarrow \Delta U = C(T_f - T_i)$$

Quindi

$$L = -\Delta U_{\text{sist}} = -C(T_f - T_1) - C(T_f - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2T_f) = 3.9\text{ kJ}$$

2. a) Come prima cosa va trovato il numero di moli di elio. Questa si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti, sapendo che entrambi i gas occupano lo stesso volume e hanno la stessa temperatura, quindi:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow n_2 = n_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} = 0.25\text{ mol}$$

Visto che il recipiente è isolato dall'ambiente, la variazione di energia interna del sistema sarà nulla, ed essendo i gas ideali e in equilibrio termico fra loro (visto il pistone diatermico) sia nello stato iniziale che in quello finale, sappiamo che $U \propto T$ e $\Delta U = 0$ quindi $\Delta T = 0$ e la temperatura finale sarà la stessa di quella iniziale: $T_f = 300$ K.

- b) Per calcolare il rapporto fra i volumi dopo l'equilibrio è sufficiente usare l'equazione di stato dei gas reali sapendo che questi sono in equilibrio termico e che hanno la stessa pressione. Vale quindi

$$r = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = 4$$

Possiamo anche scrivere i volumi finali in rapporto al volume V_0 iniziale:

$$V_1 = \frac{4}{5}(2V_0) = \frac{8}{5}V_0$$

$$V_2 = \frac{1}{5}(2V_0) = \frac{2}{5}V_0$$

- c) Essendo il sistema isolato dall'ambiente, la variazione di entropia dell'Universo sarà data dalla somma delle variazioni di entropia dei gas. Per un gas perfetto si può scrivere la variazione di entropia come

$$\Delta S = n c_v \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

E nel nostro caso il primo termine è nullo, quindi:

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R \ln \frac{8}{5} + n_2 R \ln \frac{2}{5} = 2.66 \text{ J/K}$$

- d) Se si rimuove il pistone entrambi i gas farebbero espansione libera fino ad occupare tutto il volume (pari a $2V_0$), senza cambiare la loro temperatura. Quindi con lo stesso approccio del punto precedente varrebbe:

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R \ln \frac{5}{4} + n_2 R \ln 5 = 5.62 \text{ J/K}$$

- e) Se i due gas fossero uguali tutti i punti precedenti alla rimozione del pistone sarebbero analoghi, ma rimuovere il pistone non farebbe variare l'entropia dell'universo. Questo è noto come paradosso di Gibbs, si basa sul fatto che i gas perfetti sono indistinguibili, quindi il sistema risulta trasparente alla presenza del pistone una volta raggiunto l'equilibrio. Non sorprende quindi che in presenza di un gas in equilibrio, aggiungere o rimuovere una barriera senza far variare pressione o temperatura al gas sia una trasformazione reversibile, che quindi non fa variare l'entropia dell'universo.

3. a) Come prima cosa ricostruiamo le temperature raggiunte nei diversi stati del ciclo. Per un gas perfetto biatomico valgono

$$c_v = \frac{5}{2}R \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$$

Chiamiamo A lo stato iniziale, B lo stato raggiunto dopo l'espansione adiabatica irreversibile, C quello raggiunto dopo la compressione isobara e D quello raggiunto dopo la compressione adiabatica reversibile. Abbiamo quindi

$$V_A = V, \quad T_A = 400 \text{ K}, \quad V_B = 4V, \quad T_B = T_x$$

La trasformazione BC è isobara, quindi per un gas perfetto temperatura e volume sono proporzionali:

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_x \frac{2V}{4V} = \frac{T_x}{2}$$

La trasformazione CD è invece adiabatica reversibile. Possiamo quindi usare la relazione $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$:

$$T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_x}{2} 2^{2/5} = \frac{T_x}{2^{3/5}}$$

Prima di imporre che il lavoro del ciclo sia positivo, dobbiamo determinare quali valori di T_x siano fisicamente compatibili con la prima trasformazione. Poiché AB è adiabatica, la variazione di entropia dell'Universo coincide con quella del gas e deve essere non negativa:

$$\Delta S_{U,AB} = \Delta S_{AB} = n c_v \ln \frac{T_x}{T_A} + n R \ln \frac{V_B}{V_A} = n R \left[\frac{5}{2} \ln \frac{T_x}{400} + \ln 4 \right] \geq 0$$

Da cui

$$T_x \geq 400 4^{-2/5} = 229.7 \text{ K}$$

Il valore di uguaglianza corrisponde però al limite di un'espansione adiabatica reversibile; per una trasformazione strettamente irreversibile deve quindi essere $T_x > 229.7 \text{ K}$. Inoltre il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione vale

$$L_{AB} = -\Delta U_{AB} = n c_v (T_A - T_x)$$

e deve essere non negativo. Ne segue $T_x \leq T_A = 400 \text{ K}$; il valore $T_x = 400 \text{ K}$ corrisponde al limite di un'espansione libera.

Calcoliamo ora il lavoro delle quattro trasformazioni. Per AB abbiamo già trovato

$$L_{AB} = n c_v (T_A - T_x)$$

Per la compressione isobara reversibile:

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) = n R (T_C - T_B) = -\frac{1}{2} n R T_x$$

Per la compressione adiabatica reversibile:

$$L_{CD} = -\Delta U_{CD} = n c_v (T_C - T_D) = n c_v T_x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{3/5}} \right)$$

Infine la trasformazione DA è isocora e quindi

$$L_{DA} = 0$$

Il lavoro totale del ciclo risulta quindi

$$L(T_x) = nR \left[\frac{5}{2} T_A - \left(\frac{7}{4} + \frac{5}{2} 2^{-3/5} \right) T_x \right]$$

e, sostituendo $n = 2$ e $T_A = 400$ K,

$$L(T_x) = 16.63 \text{ kJ} - 0.05653 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} T_x$$

Il lavoro si annulla per

$$T_x^{(0)} = \frac{\frac{5}{2} T_A}{\frac{7}{4} + \frac{5}{2} 2^{-3/5}} = 294.2 \text{ K}$$

Essendo $L(T_x)$ una funzione decrescente, il lavoro del ciclo è positivo per $T_x < T_x^{(0)}$. Tenendo conto anche dell'intervallo fisicamente possibile trovato in precedenza, otteniamo quindi

$$229.7 \text{ K} < T_x < 294.2 \text{ K}$$

dove l'estremo inferiore può essere incluso solo se si considera anche il limite reversibile della prima trasformazione.

- b) Il rendimento è nullo quando il lavoro totale del ciclo è nullo, quindi per $T_x = T_x^{(0)} = 294.2$ K. Le temperature dei quattro stati sono in questo caso

$$T_A = 400 \text{ K}, \quad T_B = 294.2 \text{ K}, \quad T_C = 147.1 \text{ K}, \quad T_D = 194.1 \text{ K}$$

Le trasformazioni BC e CD sono reversibili e non producono entropia. Dobbiamo quindi considerare soltanto le due trasformazioni irreversibili AB e DA .

La trasformazione AB è adiabatica, quindi l'ambiente non cambia entropia e la variazione di entropia dell'Universo coincide con quella del gas:

$$\Delta S_{U,AB} = n c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + n R \ln \frac{V_B}{V_A} = 10.3 \text{ J/K}$$

Nella trasformazione DA il gas viene posto a contatto con un serbatoio alla temperatura finale $T_A = 400$ K. Il calore assorbito dal gas vale

$$Q_{DA} = n c_v (T_A - T_D) = 8.56 \text{ kJ}$$

La variazione di entropia del gas e quella del serbatoio sono rispettivamente

$$\Delta S_{gas,DA} = n c_v \ln \frac{T_A}{T_D} = 30.1 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb,DA} = -\frac{Q_{DA}}{T_A} = -21.4 \text{ J/K}$$

e quindi

$$\Delta S_{U,DA} = \Delta S_{gas,DA} + \Delta S_{serb,DA} = 8.66 \text{ J/K}$$

La variazione totale di entropia dell'Universo durante il ciclo è pertanto

$$\Delta S_U = \Delta S_{U,AB} + \Delta S_{U,DA} = 18.9 \text{ J/K}$$

- c) Nel caso di rendimento nullo la temperatura massima del ciclo è $T_A = 400$ K, mentre la temperatura minima è quella dello stato C :

$$T_{min} = T_C = 147.1 \text{ K}, \quad T_{max} = T_A = 400 \text{ K}$$

Il rendimento di una macchina di Carnot che operi fra queste temperature è quindi

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{147.1}{400} = 0.632 = 63.2\%$$

- d) Il lavoro è una funzione lineare e decrescente di T_x . Nel dominio fisicamente possibile parte da $L = 3.64$ kJ nel limite adiabatico reversibile, si annulla per $T_x = 294.2$ K e raggiunge $L = -5.98$ kJ nel limite dell'espansione libera.

1.6 Esercitazione 6 - 28 aprile 2026

1. a) Indichiamo con T_1 la temperatura raggiunta dal gas e dal corpo A al termine del primo contatto termico e con T_2 quella raggiunta dal gas e dal corpo B al termine del secondo contatto. Durante il contatto con il corpo A il pistone è libero di muoversi ed è privo di massa e di attrito. Il gas resta quindi in equilibrio meccanico con l'ambiente alla pressione costante p_0 : la prima trasformazione del gas è un'isobara. Il calore assorbito dal gas può essere scritto come

$$Q_A = nc_p(T_1 - T_0)$$

mentre il calore ceduto dal corpo A , che ha capacità termica costante, vale

$$Q_{A, corpo} = C_A(T_1 - T_A)$$

Poiché gli scambi di calore avvengono soltanto fra il gas e il corpo A , la somma dei due calori deve essere nulla:

$$nc_p(T_1 - T_0) + C_A(T_1 - T_A) = 0$$

Per un gas perfetto monoatomico $c_p = 5R/2$, quindi

$$T_1 = \frac{nc_p T_0 + C_A T_A}{nc_p + C_A} = 365 \text{ K}$$

e il calore assorbito dal gas durante questa prima trasformazione è

$$Q_A = nc_p(T_1 - T_0) = +3.38 \text{ kJ}$$

Il segno positivo indica che il gas assorbe calore; il corpo A cede naturalmente la stessa quantità di calore. Prima del contatto con il corpo B il pistone viene bloccato. La seconda trasformazione avviene quindi a volume costante e il gas non compie lavoro. Il bilancio energetico del sistema gas più corpo B è

$$nc_v(T_2 - T_1) + C_B(T_2 - T_B) = 0$$

con $c_v = 3R/2$. Da questa relazione si ricava

$$T_2 = \frac{nc_v T_1 + C_B T_B}{nc_v + C_B} = 278.9 \text{ K}$$

Il calore scambiato dal gas con il corpo B vale quindi

$$Q_B = nc_v(T_2 - T_1) = -2.68 \text{ kJ}$$

In questo caso il segno è negativo: il gas cede 2.68 kJ al corpo B .

- b) Dopo aver allontanato il corpo B , il gas viene nuovamente isolato e il fermo viene rimosso. All'inizio di quest'ultima trasformazione il volume del gas è ancora quello raggiunto al termine della prima isobara, che indichiamo con V_1 , ma la sua pressione è inferiore a quella esterna perché nel frattempo il gas si è raffreddato a volume costante. L'ambiente comprime quindi il gas in modo adiabatico e irreversibile fino a riportarlo alla pressione p_0 . Indicando con T_f e V_f temperatura e volume finali, il lavoro compiuto dal gas contro la pressione esterna costante è

$$L = p_0(V_f - V_1)$$

e, poiché $Q = 0$, il primo principio fornisce

$$nc_v(T_f - T_2) = -p_0(V_f - V_1)$$

All'inizio e alla fine di questa trasformazione valgono inoltre

$$p_0V_1 = nRT_1 \quad p_0V_f = nRT_f$$

Sostituendo queste due relazioni nel primo principio si ottiene

$$nc_v(T_f - T_2) = nR(T_1 - T_f)$$

e quindi

$$T_f = \frac{c_v T_2 + R T_1}{c_p} = \frac{3T_2 + 2T_1}{5} = 313.3 \text{ K}$$

- c) Per calcolare la variazione di entropia dell'Universo conviene considerare separatamente le tre trasformazioni. Il lavoro scambiato con l'ambiente non trasporta entropia, quindi dobbiamo sommare le variazioni di entropia del gas e dei due corpi. Durante il contatto con il corpo A , il gas compie una trasformazione isobara e si ha

$$\Delta S_{U,1} = nc_p \ln \frac{T_1}{T_0} + C_A \ln \frac{T_1}{T_A} = 2.32 \text{ J/K}$$

Durante il contatto isocoro con il corpo B :

$$\Delta S_{U,2} = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + C_B \ln \frac{T_2}{T_B} = 7.00 \text{ J/K}$$

Infine, l'ultima trasformazione è adiabatica, quindi la variazione di entropia dell'Universo coincide con quella del gas:

$$\Delta S_{U,3} = nc_v \ln \frac{T_f}{T_2} + nR \ln \frac{V_f}{V_1}$$

Poiché $p_0V_f = nRT_f$ e $p_0V_1 = nRT_1$, il rapporto fra i volumi è $V_f/V_1 = T_f/T_1$. Si ottiene quindi

$$\Delta S_{U,3} = 0.458 \text{ J/K}$$

La variazione complessiva di entropia dell'Universo è

$$\Delta S_U = \Delta S_{U,1} + \Delta S_{U,2} + \Delta S_{U,3} = 9.77 \text{ J/K}$$

Il risultato è positivo, come deve essere perché tutte e tre le trasformazioni avvengono in modo irreversibile.

2. a) La macchina frigorifera opera fra due corpi la cui temperatura cambia durante il processo. Dobbiamo usare la reversibilità dell'intero processo: la variazione totale di entropia delle due moli d'acqua deve essere nulla. Indichiamo con $m = 18.02 \text{ g}$ la massa di una mole d'acqua e con x la frazione della seconda mole che viene trasformata in vapore. Usiamo

$$c = 4.186 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, \quad \lambda_f = 3.335 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}, \quad \lambda_v = 2.256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

La prima mole viene raffreddata da $T_i = 298.15 \text{ K}$ a $T_f = 273.15 \text{ K}$ e poi congelata. La sua variazione di entropia è quindi

$$\Delta S_1 = mc \ln \frac{T_f}{T_i} - \frac{m\lambda_f}{T_f}$$

La seconda mole viene riscaldata da T_i fino alla temperatura di ebollizione $T_b = 373.15 \text{ K}$ e una frazione x viene vaporizzata:

$$\Delta S_2 = mc \ln \frac{T_b}{T_i} + \frac{xm\lambda_v}{T_b}$$

Imponendo la reversibilità,

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$$

si ricava

$$x = \frac{T_b}{\lambda_v} \left[\frac{\lambda_f}{T_f} - c \ln \frac{T_f}{T_i} - c \ln \frac{T_b}{T_i} \right] = 0.107$$

Viene quindi convertito in vapore circa il

$$10.7\%$$

della seconda mole d'acqua.

b) Il calore sottratto alla mole che viene congelata è

$$Q_f = m [c(T_i - T_f) + \lambda_f] = 7.90 \text{ kJ}$$

Il calore ceduto alla seconda mole è invece

$$Q_c = m [c(T_b - T_i) + x\lambda_v] = 10.02 \text{ kJ}$$

Per una macchina frigorifera che compie un ciclo, il primo principio dà

$$Q_c = Q_f + L_{\text{fornito}}$$

e quindi il lavoro che deve essere fornito alla macchina vale

$$L_{\text{fornito}} = Q_c - Q_f = 2.12 \text{ kJ}$$

3. a) Indichiamo con $x(t)$ lo spessore dello strato di ghiaccio. La superficie superiore del ghiaccio è mantenuta alla temperatura dell'aria $T_a = -10^\circ\text{C}$, mentre l'interfaccia fra acqua e ghiaccio resta alla temperatura di fusione $T_m = 0^\circ\text{C}$. Assumiamo che il profilo di temperatura nel ghiaccio sia in ogni istante lineare. Il flusso di calore per unità di superficie attraverso uno strato di spessore x è quindi

$$\frac{\dot{Q}}{A} = k \frac{T_m - T_a}{x}$$

Nello stesso intervallo di tempo congela, per unità di superficie, una massa $\rho_g dx$. Il calore latente liberato per unità di tempo e di superficie è dunque

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \rho_g \lambda_f \frac{dx}{dt}$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene

$$\rho_g \lambda_f x \frac{dx}{dt} = k(T_m - T_a)$$

e, integrando con $x(0) = 0$,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2k(T_m - T_a)}{\rho_g \lambda_f} t}$$

b) Ponendo $x = 5.0$ cm nella relazione precedente:

$$t = \frac{\rho_g \lambda_f x^2}{2k(T_m - T_a)} = 1.83 \cdot 10^4 \text{ s} = 5.07 \text{ h}$$

c) Dall'equazione differenziale trovata al punto a) ricaviamo direttamente la velocità di crescita:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k(T_m - T_a)}{\rho_g \lambda_f x}$$

Quando lo spessore è $x = 5.0$ cm,

$$\frac{dx}{dt} = 1.37 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

d) Alla quota dell'interfaccia acqua-ghiaccio il calore latente viene liberato alla temperatura T_m , mentre l'aria lo assorbe alla temperatura T_a . Il flusso di variazione dell'entropia dell'Universo per unità di superficie è quindi

$$\frac{\dot{S}_U}{A} = \frac{\dot{Q}/A}{T_a} - \frac{\dot{Q}/A}{T_m} = \frac{\dot{Q}}{A} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_m} \right)$$

Per $x = 5.0$ cm il flusso termico vale

$$\frac{\dot{Q}}{A} = k \frac{T_m - T_a}{x} = 420 \text{ W/m}^2$$

e quindi

$$\frac{\dot{S}_U}{A} = 5.84 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

2 FLUIDODINAMICA

2.1 Esercitazione 7 - 07 maggio 2026

1. a) Il cubo ha lato $l = 10$ cm. Quando galleggia nell'acqua ed emerge di 1.5 cm, la sua parte immersa ha altezza 8.5 cm. Dall'equilibrio fra peso e spinta di Archimede si ricava innanzitutto la densità del legno:

$$\rho_{\text{legno}} l^3 g = \rho_{\text{acqua}} l^2 (8.5 \text{ cm}) g$$

e quindi

$$\rho_{\text{legno}} = \rho_{\text{acqua}} \frac{8.5}{10} = 850 \text{ kg/m}^3$$

Dopo aver aggiunto uno strato d'olio spesso 6 cm, il cubo emerge di 9 mm dalla superficie dell'olio. La parte immersa in acqua è quindi alta

$$h_{\text{acqua}} = 10 \text{ cm} - 6 \text{ cm} - 0.9 \text{ cm} = 3.1 \text{ cm}$$

mentre la parte immersa nell'olio è alta 6 cm. Il nuovo equilibrio di Archimede è

$$\rho_{\text{legno}} (10 \text{ cm}) = \rho_{\text{acqua}} (3.1 \text{ cm}) + \rho_{\text{olio}} (6.0 \text{ cm})$$

Da cui

$$\rho_{\text{olio}} = 900 \text{ kg/m}^3$$

- b) Aggiungendo altri 10 cm, lo strato d'olio diventa spesso 16 cm, quindi il cubo può galleggiare interamente nell'olio senza toccare l'acqua. Indicando con h la parte immersa:

$$\rho_{\text{legno}} l = \rho_{\text{olio}} h$$

e quindi

$$h = l \frac{\rho_{\text{legno}}}{\rho_{\text{olio}}} = 10 \text{ cm} \frac{850}{900} = 9.44 \text{ cm}$$

Il cubo affiora quindi di

$$l - h = 0.56 \text{ cm} = 5.6 \text{ mm}$$

2. a) Indichiamo con S la sezione del recipiente, con s quella del foro e poniamo

$$\varepsilon = \frac{s}{S} = 0.01$$

Se v è la velocità di uscita dal foro e v_s la velocità con cui scende la superficie libera, dalla continuità si ha

$$S v_s = s v \rightarrow v_s = \varepsilon v$$

Applichiamo Bernoulli fra la superficie libera, posta ad altezza h , e il foro. Le due pressioni sono entrambe atmosferiche:

$$\frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Sostituendo $v_s = \varepsilon v$ si ricava

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \varepsilon^2}}$$

La velocità è massima all'istante iniziale e diminuisce durante lo svuotamento. L'altezza soddisfa

$$-\frac{dh}{dt} = v_s = \varepsilon \sqrt{\frac{2gh}{1 - \varepsilon^2}}$$

Integrando da $h_0 = 1$ m fino a $h = 0$:

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 45.15 \text{ s}$$

Poiché $\varepsilon^2 = 10^{-4}$, trascurare la velocità della superficie libera nell'equazione di Bernoulli equivale a porre $1 - \varepsilon^2 \simeq 1$. Si otterrebbe

$$t_{app} = 45.152 \text{ s}$$

invece di 45.150 s: la differenza è soltanto 2.3 ms, ossia lo 0.005%. Non sarebbe invece corretto assumere costante la velocità iniziale massima per tutto lo svuotamento. In quel caso si troverebbe $t = 22.6$ s, esattamente la metà del valore corretto.

3. a) Indichiamo con S la superficie del contenitore e con $s = S/100$ la sezione del tubo. La velocità della superficie libera è quindi $v_s = v/100$, dove v è la velocità nel tubo. All'istante iniziale la superficie libera è alla quota zero e il punto C si trova a $h_C = -0.60$ m. Applicando Bernoulli fra la superficie e l'uscita C :

$$\frac{1}{2} \rho v_s^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h_C$$

da cui

$$v_C = \sqrt{\frac{2g(0 - h_C)}{1 - (s/S)^2}} = 3.43 \text{ m/s}$$

- b) Per trovare la pressione nel punto più alto B conviene applicare Bernoulli fra B e C . Il tubo ha sezione costante, quindi le velocità nei due punti sono uguali e i termini cinetici si cancellano:

$$p_B + \rho g h_B = p_{atm} + \rho g h_C$$

Ne segue

$$p_B = p_{atm} + \rho g (h_C - h_B) = 9.05 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

ossia circa 0.893 atm in pressione assoluta. La pressione relativa all'atmosfera è -10.8 kPa.

- c) Nel modello ideale il sifone può funzionare finché la pressione assoluta in B non diventa nulla. Imponendo $p_B = 0$ nella relazione precedente:

$$h_{B,max} = h_C + \frac{p_{atm}}{\rho g} = 9.73 \text{ m}$$

Nella realtà il limite viene raggiunto prima, quando la pressione scende fino alla pressione di vapore dell'acqua e si formano bolle.

- d) Il sifone smette di svuotare il recipiente quando la superficie raggiunge l'ingresso A , alla quota $h_A = -0.20$ m. In quell'istante la velocità nel tubo vale

$$v_f = \sqrt{\frac{2g(h_A - h_C)}{1 - (s/S)^2}} = 2.80 \text{ m/s}$$

La velocità iniziale è $v_i = 3.43$ m/s. Usando l'ipotesi fornita che la velocità vari linearmente con il tempo, la portata media è

$$\overline{Q} = s \frac{v_i + v_f}{2}$$

Il volume da estrarre è $S(0 - h_A)$, quindi

$$t = \frac{S(0 - h_A)}{s(v_i + v_f)/2} = 6.42 \text{ s}$$

2.2 Esercitazione 8 - 18 maggio 2026

1. a) Consideriamo il sistema formato dalla cassaforte e dal pallone. La cassaforte ha volume

$$V_c = (0.50 \text{ m})^3 = 0.125 \text{ m}^3$$

mentre il pallone, di raggio $r = 0.60 \text{ m}$, ha volume e sezione frontale

$$V_p = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.905 \text{ m}^3, \quad A = \pi r^2 = 1.131 \text{ m}^2$$

La spinta di Archimede agisce sia sul pallone sia sulla cassaforte. Verso il basso agiscono il peso della cassaforte e quello dell'aria contenuta nel pallone; trascuriamo invece la massa dell'involucro. La forza risultante verso l'alto, prima di considerare la resistenza del fluido, è

$$F_0 = \rho_{acqua}g(V_p + V_c) - mg - \rho_{aria}V_pg = 2.83 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Alla velocità limite questa forza è equilibrata dalla resistenza quadratica sul pallone:

$$F_D = \frac{1}{2}C\rho_{acqua}Av_{lim}^2$$

Quindi

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2F_0}{C\rho_{acqua}A}} = 1.00 \text{ m/s}$$

2. a) Va usata la legge di Poiseuille, valida per un moto laminare completamente sviluppato:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

Se i due estremi del tubo sono entrambi a pressione atmosferica, la differenza di quota deve fornire la stessa differenza di pressione:

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

La portata vale

$$Q = 120 \frac{\text{L}}{\text{min}} = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Con $R = 0.040 \text{ m}$ e $L = 4000 \text{ m}$ si ottiene

$$\Delta p = \frac{8\eta L Q}{\pi R^4} = 7.96 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

e quindi

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} = 0.811 \text{ m}$$

- b) Prima di accettare il risultato dobbiamo però verificare il regime di moto. La velocità media dell'acqua è

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = 0.398 \text{ m/s}$$

e il numero di Reynolds vale

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} = 3.18 \cdot 10^4$$

Questo valore è molto maggiore del limite del regime laminare. Il valore $\Delta h = 0.811$ m è quindi soltanto il risultato formale ottenuto applicando Poiseuille, ma il modello utilizzato si basa sull'ipotesi errata del regime laminare.

3. a) Il volume della palla è

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 5.24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

La spinta di Archimede è maggiore del peso, perché la massa di olio spostata è $\rho V = 0.524$ kg mentre la massa della palla è 0.450 kg. La forza risultante verso l'alto, in assenza di attrito, è

$$F_0 = (\rho V - m)g = 0.722 \text{ N}$$

Se la viscosità è nulla, tutta l'energia potenziale associata a questa forza risultante si trasforma in energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_0 H$$

e quindi, per $H = 5$ m,

$$v = \sqrt{\frac{2F_0 H}{m}} = 4.01 \text{ m/s}$$

Non essendoci dissipazione viscosa, in questo caso non viene prodotto calore nell'olio:

$$Q_{olio} = 0$$

b) Nell'ipotesi di regime di Stokes, la forza resistente è

$$F_D = 6\pi\eta r v$$

Alla velocità limite essa equilibra la forza risultante F_0 :

$$6\pi\eta r v_{lim} = F_0$$

e quindi

$$v_{lim} = \frac{F_0}{6\pi\eta r} = 1.53 \text{ m/s}$$

Verifichiamo ora l'ipotesi di moto laminare mediante il numero di Reynolds costruito sul diametro della palla:

$$Re = \frac{\rho v_{lim} (2r)}{\eta} = 3.06 \cdot 10^2$$

La legge di Stokes richiede $Re \ll 1$, quindi l'ipotesi non è verificata. Il valore 1.53 m/s è pertanto un risultato formale.

- c) Seguendo comunque l'ipotesi richiesta dal testo e supponendo che la palla arrivi in superficie con la velocità limite appena calcolata, il lavoro della forza risultante F_0 viene in parte trasformato in energia cinetica e in parte dissipato come calore nell'olio:

$$F_0 H = \frac{1}{2} m v_{lim}^2 + Q_{olio}$$

Da cui

$$Q_{olio} = F_0 H - \frac{1}{2} m v_{lim}^2 = 3.08 \text{ J}$$

L'olio assorbe quindi formalmente 3.08 J. Questo valore eredita naturalmente l'incoerenza dell'ipotesi di Stokes evidenziata al punto precedente.

4. a) Il fatto che la sferetta continui a muoversi al centro del tubo implica che essa non acceleri lungo la direzione verticale. Le due forze verticali agenti sulla sferetta sono il suo peso e la spinta di Archimede. Affinché queste si bilancino deve quindi valere

$$\rho_s \frac{4}{3} \pi R^3 g = \rho_f \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

da cui si ottiene

$$\rho_s = \rho_f = 200 \text{ kg/m}^3.$$

La sferetta deve quindi avere la stessa densità del fluido. In questo modo il peso e la spinta di Archimede si compensano e il moto può essere studiato considerando soltanto le forze agenti lungo la direzione orizzontale.

La massa della sferetta è

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f$$

mentre, nell'ipotesi di regime di Stokes, la forza resistente esercitata dal fluido vale

$$F_D = 6\pi\eta Rv.$$

L'equazione del moto lungo la direzione orizzontale è quindi

$$m \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta Rv.$$

Definendo la costante di tempo

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta R}$$

e sostituendo l'espressione della massa si ottiene

$$\tau = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f}{6\pi\eta R} = \frac{2\rho_f R^2}{9\eta}.$$

L'equazione del moto può quindi essere scritta come

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau},$$

la cui soluzione, imponendo $v(0) = v_0$, è

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}.$$

La velocità della sferetta diminuisce esponenzialmente e non diventa mai esattamente nulla in un tempo finito. Possiamo però calcolare la distanza percorsa in funzione del tempo:

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Facendo tendere il tempo all'infinito si ottiene la distanza massima percorsa:

$$x_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v_0 \tau = \frac{2\rho_f R^2 v_0}{9\eta}.$$

Inserendo i valori $\rho_f = 200 \text{ kg/m}^3$, $R = 0.040 \text{ m}$, $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ e $v_0 = 8 \text{ m/s}$ si ottiene

$$\tau = \frac{2 \cdot 200 \cdot (0.040)^2}{9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 17.8 \text{ s}.$$

La distanza percorsa prima di arrestarsi, intendendo con questo il limite asintotico per $t \rightarrow \infty$, è quindi

$$x_{max} = v_0 \tau = 8 \cdot 17.8 = 142 \text{ m}.$$

Per determinare il tempo necessario affinché la velocità si riduca a un decimo di quella iniziale imponiamo

$$\frac{v_0}{10} = v_0 e^{-t/\tau}.$$

Semplificando v_0 e prendendo il logaritmo si ottiene

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{10} \rightarrow t_{1/10} = \tau \ln 10.$$

Numericamente

$$t_{1/10} = 17.8 \ln 10 = 40.9 \text{ s}.$$

Rimane però da verificare che l'ipotesi di regime di Stokes sia compatibile con i dati del problema. Il numero di Reynolds associato al moto della sferetta è

$$Re = \frac{\rho_f v (2R)}{\eta}.$$

Alla velocità iniziale vale

$$Re_0 = \frac{200 \cdot 8 \cdot (2 \cdot 0.040)}{4 \cdot 10^{-3}} = 3.2 \cdot 10^4.$$

Anche quando la velocità si è ridotta a un decimo di quella iniziale si ha

$$Re_{1/10} = \frac{Re_0}{10} = 3.2 \cdot 10^3.$$

Entrambi i valori sono molto maggiori di uno e risultano quindi incompatibili con la condizione $Re \ll 1$ richiesta per applicare la legge di Stokes.