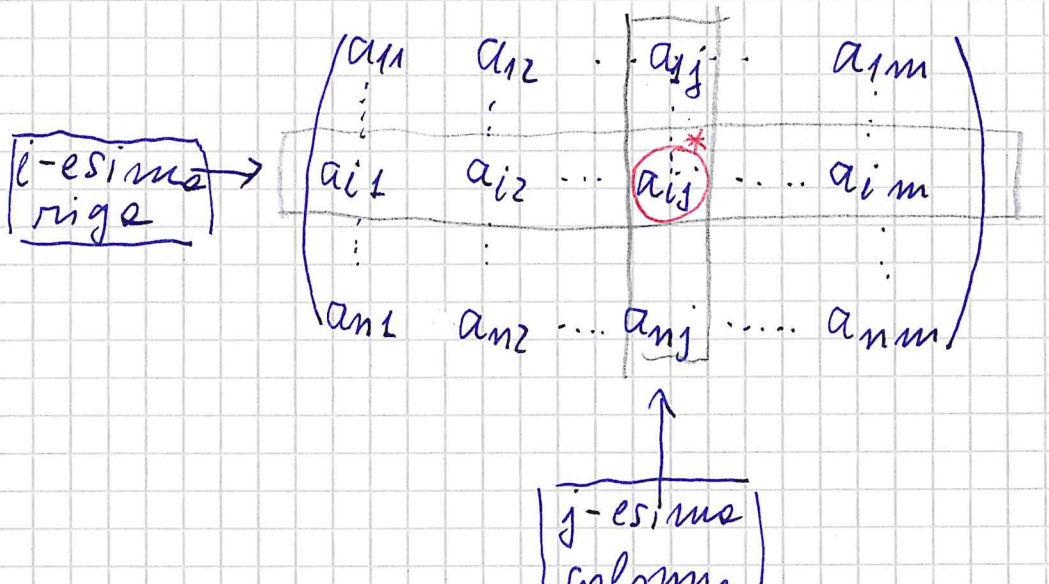
# MATRICI

Siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Una "matrice $n \times m$" è una tabella di numeri reali con $n$ righe e $m$ colonne.

Es. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

è una matrice $2 \times 3$

Una generica matrice $n \times m$ è un oggetto del tipo




In una matrice $n \times m$ ci sono $n \cdot m$ numeri intabellati, detti "entrate".

In breve si scrive $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

Se $n=m$ la matrice si dice quadrata.

Dati $n, m$, l'insieme di tutte le matrici $n \times m$ si indica con $\mathcal{M}^{n\times m}$.

Ora introdurremo in $\mathcal{M}^{n\times m}$ una struttura di spazio vettoriale.

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ $\quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

definiamo

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \qquad \text{per } \lambda \in \mathbb{R}.$$

È facile verificare che:

$A+B = B+A$

$A+(B+C) = (A+B)+C$

$A+0 = A$ (dove $0 = (c_{ij})_{ij}$ con $c_{ij}=0 \ \forall_{ij}$)

$A+(-A) = 0$

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$1 \cdot A = A$

**attenzione**: così come non posso sommare $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^m$ se $n \neq m$, non posso nemmeno sommare $A \in M^{n\times m}$ e $B \in M^{p\times q}$ se $(n,m) \neq (p,q)$.

## Prodotto di matrici

Siano $A \in M^{n\times \boxed{m}}$ $B \in M^{\boxed{m}\times p}$ (in quest'ordine!)

allora le righe di A hanno $\boxed{m}$ elementi, e le colonne di B hanno $\boxed{m}$ elementi

Posso quindi fare il prodotto scalare tra una qualsiasi riga di A e una qualsiasi colonna di B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{m,p} \end{pmatrix}$$

definisco $c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}$$

e infine definisco

$$AB := (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} \in M^{n\times p}$$

In questo modo ad $A \in M^{n\times m}$, $B \in M^{m\times p}$ associo $AB \in M^{n\times p}$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$2\times 3 \qquad 3\times 3 \qquad 2\times 3$

Attenzione

Sono definite sia AB che BA solo se $A \in M^{n\times m}$ e $B \in M^{m\times n}$

Anche in tale caso il prodotto non è commutativo in generale.

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Valgono però le seguenti proprietà:

$A(BC) = (AB)C$ associative

$A(B+C) = AB + AC$ distributive

$(A+B)C = AC + BC$ distributive.

La matrice quadrata $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

si dice matrice identità.

Se $A \in M^{n \times m}$, $I_n A = A$

Se $A \in M^{n \times m}$, $A I_m = A$

In particolare, se $A \in M^{n \times n}$ (quadrate)

$$I_n A = A I_n = A.$$

Se $A \in M^{n \times n}$ si dice che $A$ è invertibile se esiste $\exists\, A^{-1} \in M^{n \times n}$ t.c.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

N.B. esistono matrici non invertibili, bendiè $\neq 0$

Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

Infatti se $\exists\ (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B$

t.c. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

allora avremmo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

assurdo!

Vedremo poi le condizioni per l'invertibilità e il calcolo dell'inversa.

---

OSSERVAZIONE

Il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Si può scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$