

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Ci concentriamo su funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
dove I è un intervallo

($I =]a, b[$ oppure $I = [a, b]$, o $I = [a, +\infty[$,
ecc. ecc.).

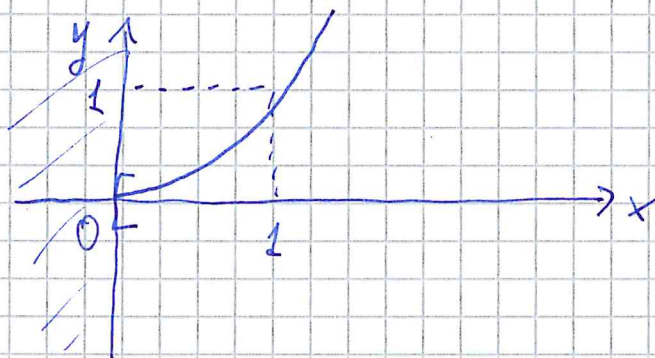
Proprietà che può avere una funzione:

1) crescente, decrescente

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

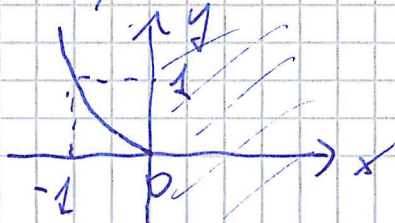
Esempio $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$



$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è decrescente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

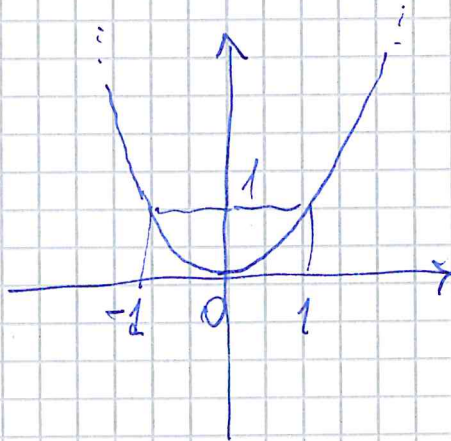
Esempio: $f:]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$



Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ si dice strettamente crescente.
 Idem per strettamente decrescente.

N.B. Se considero $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 f non è né decrescente né crescente.

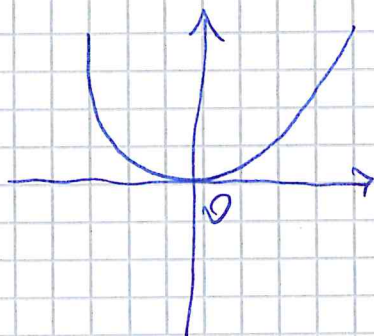
Poss'è : $\begin{cases} \text{decrescente in }]-\infty, 0] \\ \text{crescente in } [0, +\infty[\end{cases}$



2) pari, dispari.

Se $I =]-a, a[$ (simmetrico rispetto all'origine), $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ può essere :

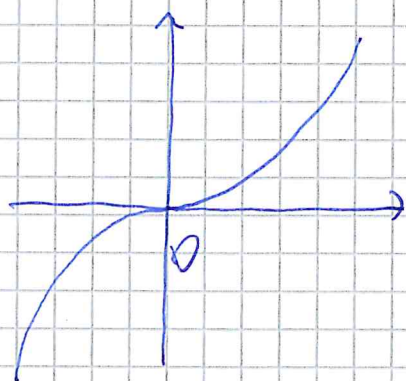
pari : e $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in I$



$$\text{Es.: } f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

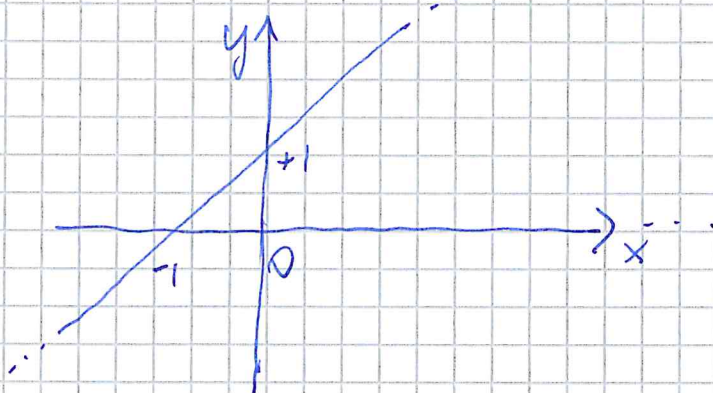
dispari : se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I$



es. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3$$

N.B. una funzione può essere né pari né dispari. Esempio $f(x) = x + 1$



N.B.

Se f è sia pari che dispari allora

$$f(x) = 0 \quad \forall x. \quad \text{Infatti}$$

$$f(x) = f(-x) = -f(x)$$

$\uparrow$
pari

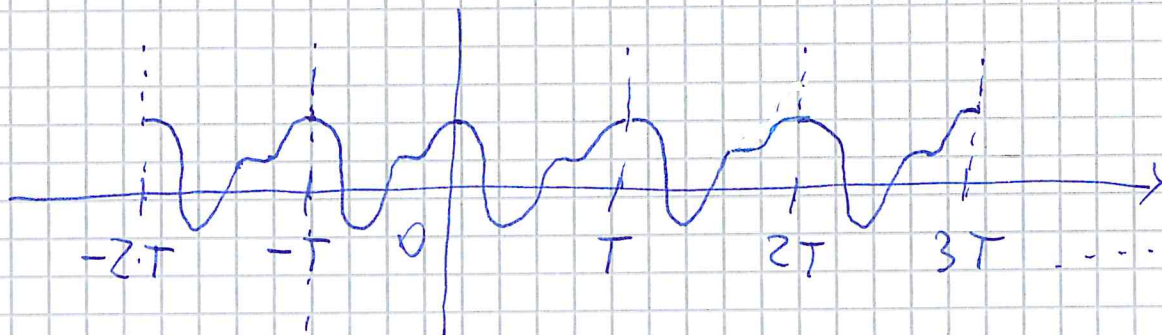
$\uparrow$
dispari

$$\Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \quad \forall x.$$

3) funzioni periodiche

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f si dice periodica

se $\exists T > 0$ t.c. $\forall x, f(x+T) = f(x)$.



C'è un pattern che si ripete.

ESEMPIO: le funzioni trigonometriche



e le altre (ci torneremo poi).

T è detto "periodo della funzione".

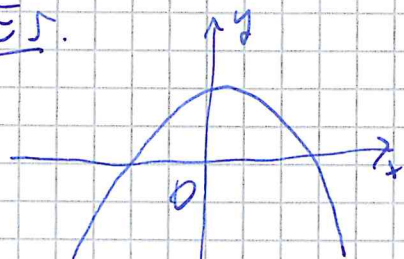
4) funzioni limitate / illimitate

Una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
può essere:

a) limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.
 $f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

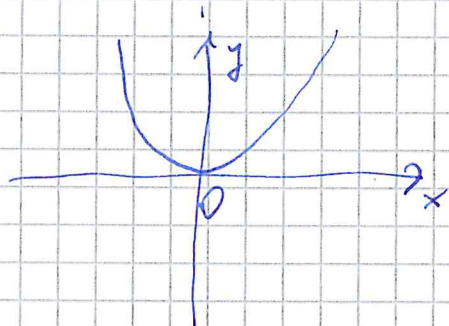
è illimitata superiormente se non è
 limitata superiormente

ES.



$$f(x) = 1 - x^2$$

limitata superiormente



$$f(x) = x^2$$

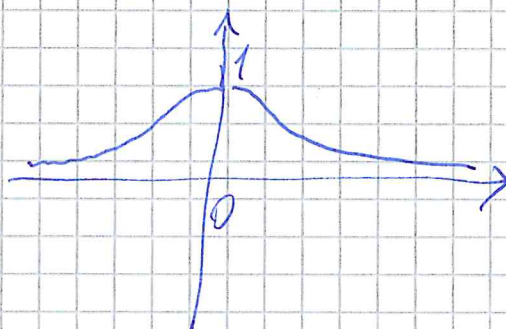
illimitata superiormente

b) in modo analogo si definisce una
 funzione illimitata o limitata
 inferiormente.

c) Una funzione che è limitata sia
 superiormente che inferiormente si dice
limitata ES. :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x$$

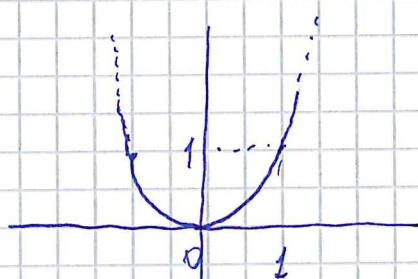


FUNZIONI DI TIPO POTENZA.

•) Per $m \in \mathbb{N}$ pari

$$f(x) = x^m$$

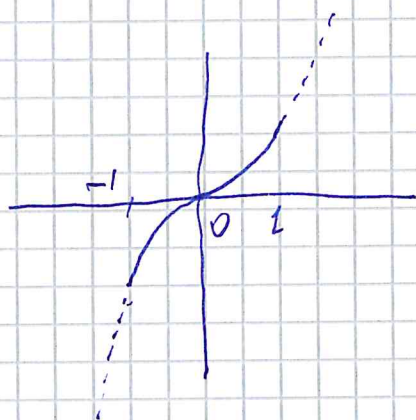
definita per $x \in \mathbb{R}$



•) Per $m \in \mathbb{N}$ dispari

$$f(x) = x^m$$

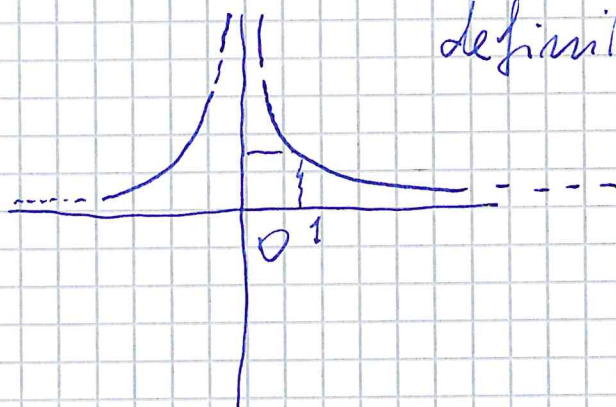
definita per $x \in \mathbb{R}$



•) Per $m \in \mathbb{N}$ pari

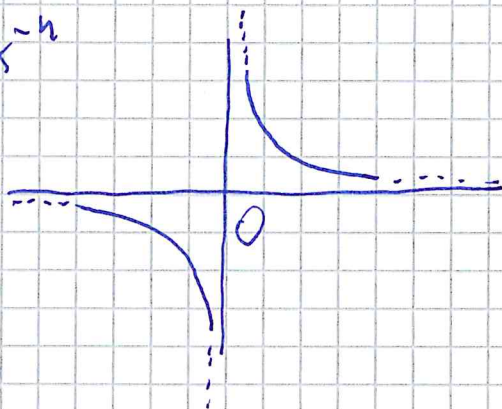
$$f(x) = x^{-n}$$

definita per $x \in \mathbb{R}$
 $x \neq 0$



•) Per $n \in \mathbb{N}$, n dispari

$$f(x) = x^{-n}$$



definita per
 $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

FUNZIONI RAZIONALI

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{dove } P \text{ e } Q \text{ sono}$$

polinomi. Vedremo come si studiano, per il momento osserviamo solo che il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{\text{zeri di } Q(x)\}$.

Esempio

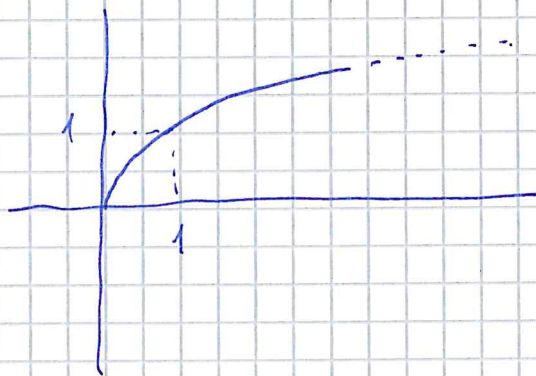
$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + 1}{(x+1)(x-1)}$$

è definita in $\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$.

FUNZIONI di tipo radice.

Se $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

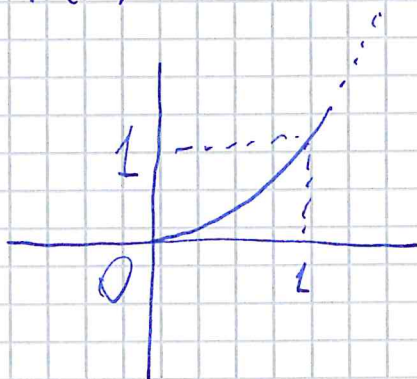
definita per $x \geq 0$



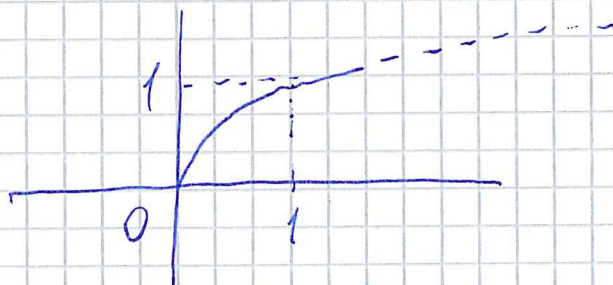
Più in generale, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

si ha

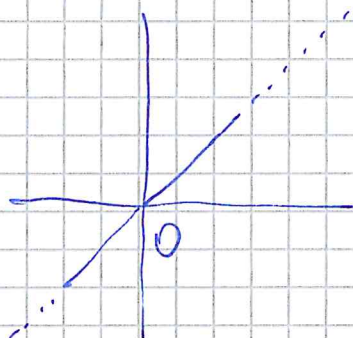
•) $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha > 1$



•) $f(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$



•) $f(x) = x$



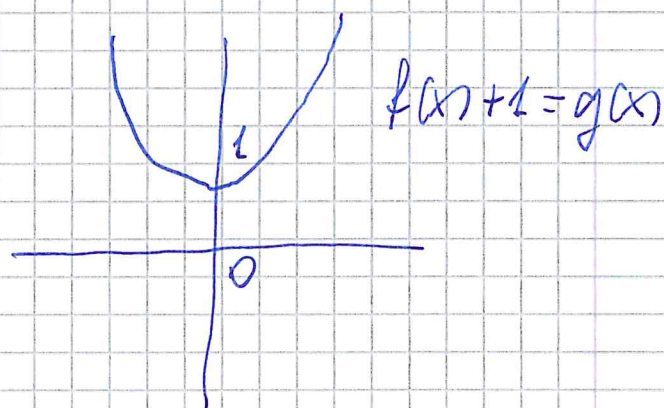
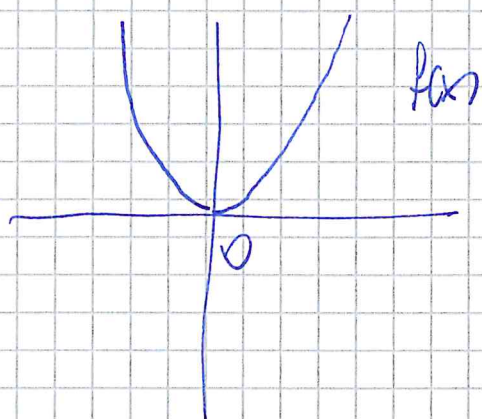
è una retta.

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

Dato $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione

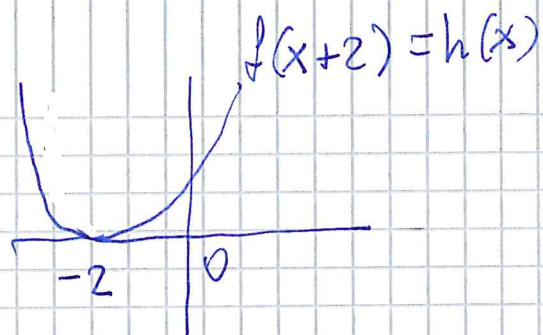
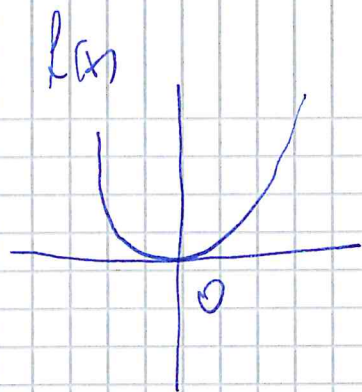
$$g(x) = f(x) + k \quad \text{ha il grafico}$$

traslato di k in direzione verticale



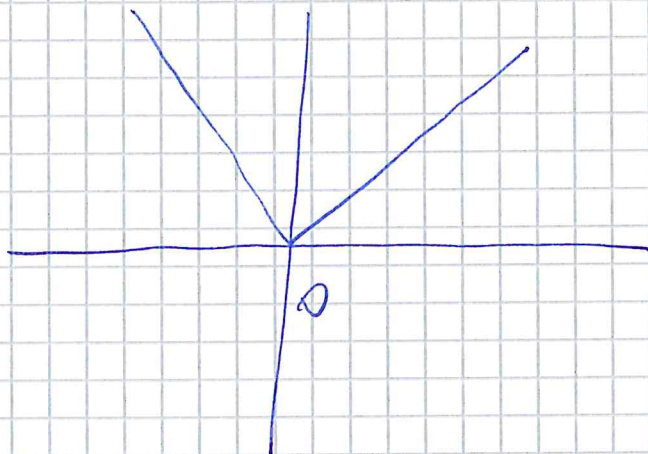
la funzione $h(x) = f(x+k)$ ha il grafico traslato di $-k$ in direzione orizzontale

-40-



FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x|$$

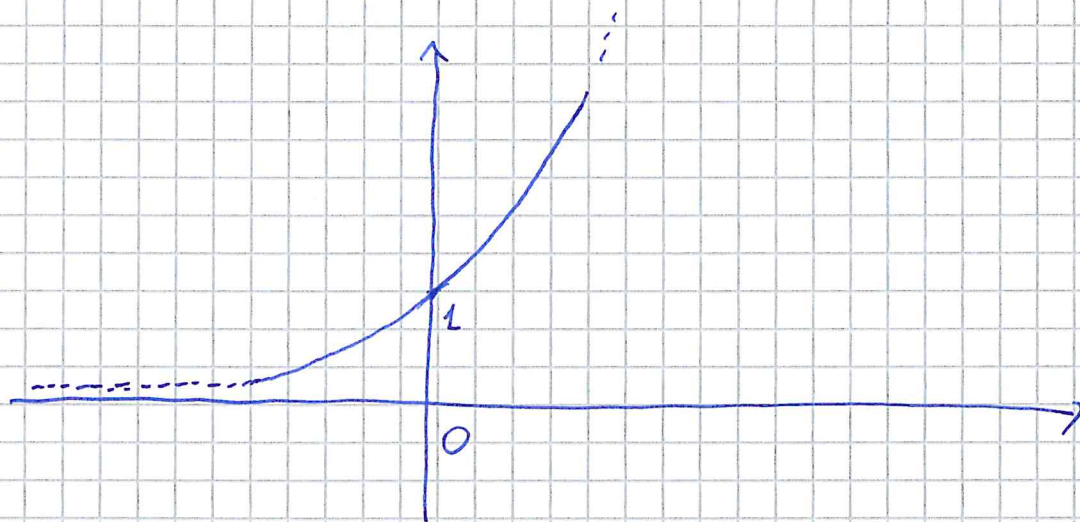


FUNZIONE ESPONENZIALE

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

la funzione esponenziale $f(x) = a^x$

ha il seguente grafico.



È definita su tutto $\mathbb{R}$.

È sempre positiva

È strettamente crescente.

$$a^0 = 1$$

$$a^x > 1 \quad \text{se} \quad x > 0$$

$$0 < a^x < 1 \quad \text{se} \quad x < 0.$$

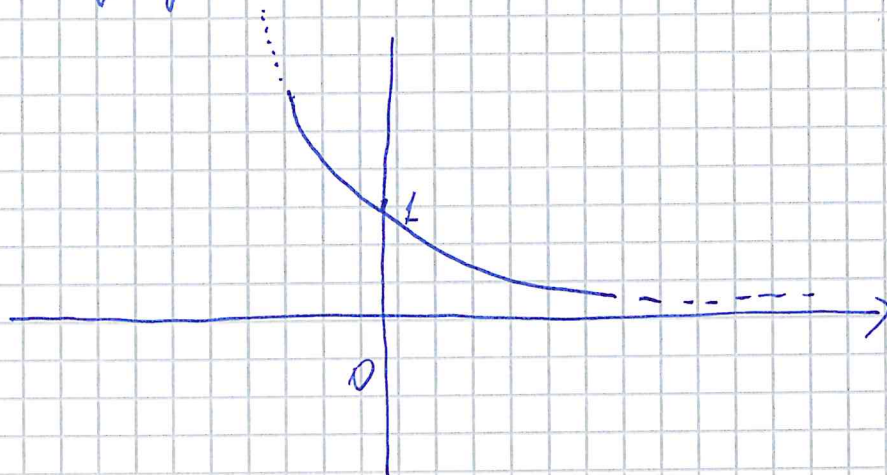
$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$$

$$(a^x)^k = a^{kx} \quad (k \in \mathbb{R})$$

-42-

Sia $0 < a < 1$

la funzione $f(x) = a^x$ ha il seguente grafico



È sempre positiva

È strettamente decrescente

$$a^0 = 1$$

$$a^x > 1 \quad \text{se} \quad x < 0$$

$$0 < a^x < 1 \quad \text{se} \quad x > 0$$

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2}$$

$$(a^x)^k = a^{kx} \quad (k \in \mathbb{R})$$