

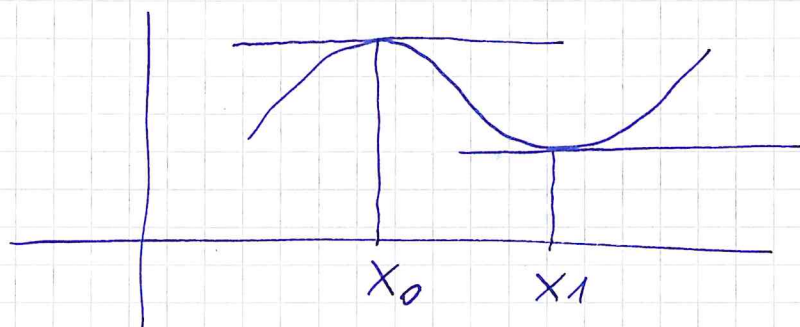
TEOREMI SULLE DERIVATETeorema

Se f è derivabile allora è continuo.

N.B. Non vale il viceversa.

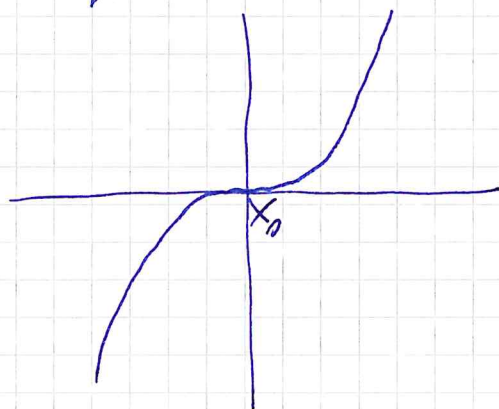
Teorema di Fermat

Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e
 sia $x_0 \in]a, b[$ punto di massimo
 o minimo locale (relativo). Allora
 $f'(x_0) = 0$ (tangente orizzontale).



N.B.

Si tratta di una condizione necessaria
 ma non sufficiente.

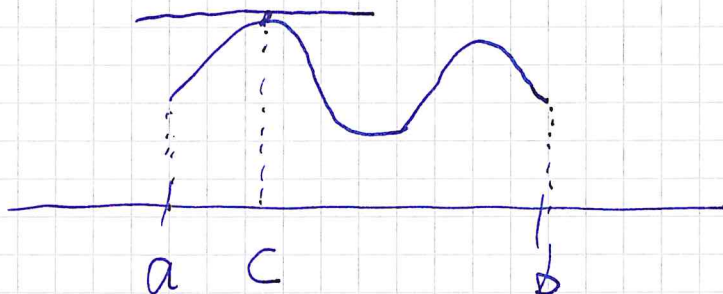


$f'(x_0) = 0$ ma
 x_0 non è né
 punto di minimo
 locale, né punto
 di max locale.

TEOREMA DI ROLLE

(94)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e
supponiamo che f sia derivabile in
 $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, Allora
esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$

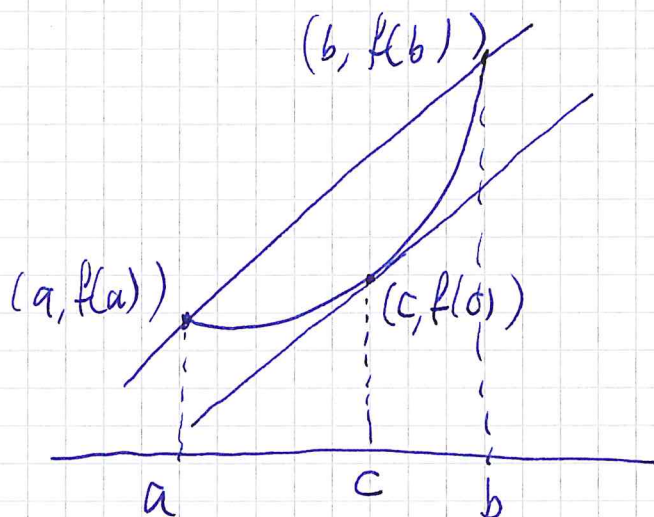


TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e supponiamo
che f sia derivabile in $]a, b[$.
Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{ovvero } f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$



la tangente
in $(c, f(c))$
ha la stessa
inclinazione
della secante
per $(a, f(a))$ e
 $(b, f(b))$.

Conseguenza Importante

(95)

Se sull'intervallo $]a, b[$ si ha che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$, allora f è crescente in $]a, b[$. Infatti, se

$$x_1, x_2 \in]a, b[\quad \text{e} \quad x_1 < x_2,$$

per la range $\exists c \in]x_1, x_2[$ t.c.

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0} \geq 0$$

e quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Analogamente, se $f'(x) \leq 0$ in $]a, b[$, allora f è decrescente in $]a, b[$.

Abbiamo ora un po' di strumenti per studiare il grafico di una funzione.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3}$$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Comportamento ai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^3} = -\infty$$

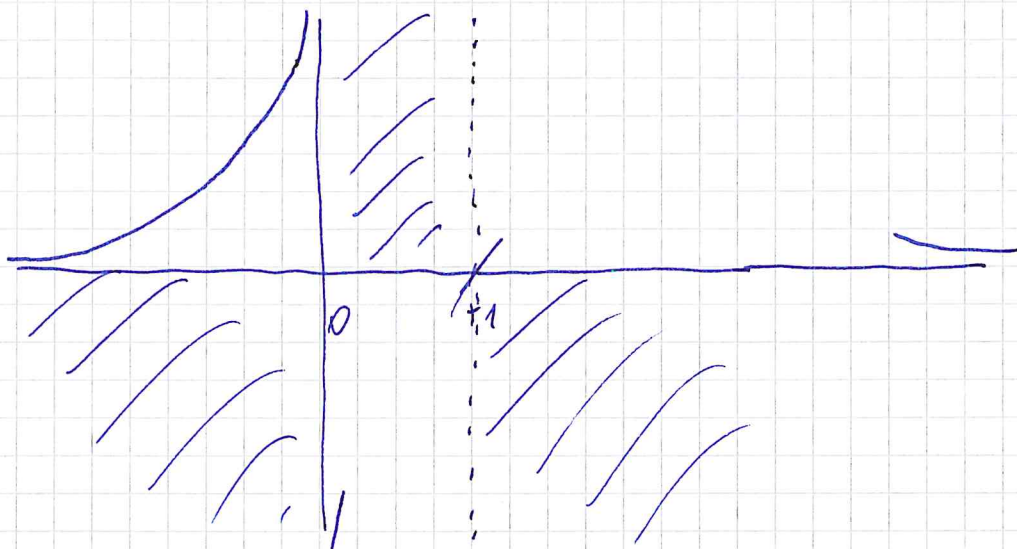
(96)

studio dei segni e zeri

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

	0	1
$x-1$	-	+
x^3	-	+
$\frac{x-1}{x^3}$	+	-



Per studiare max e min locali, e crescente/decrecente, studiamo la derivata prima.

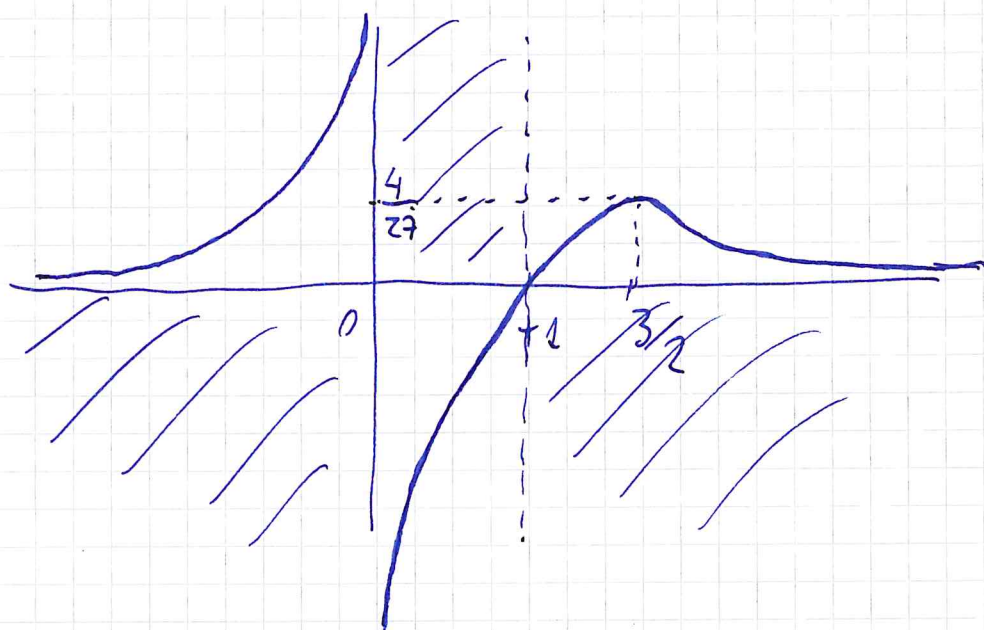
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^3 - (x-1)3x^2}{x^6} = \frac{x^3 - 3x^3 + 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{3x^2 - 2x^3}{x^6} = \frac{3 - 2x}{x^4} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

Quindi f è crescente in $]-\infty, 0[$,
è crescente in $]0, \frac{3}{2}[$, ha un
massimo relativo in $x_M = \frac{3}{2}$, ed è
decrescente in $] \frac{3}{2}, +\infty[$



ha un asintoto verticale in $x = +1$.

$$\text{Inoltre } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{27}{8}} = \frac{4}{27}$$

