ESERCIZI INTRODUTTIVI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2026/27

Esercizio 1

Considera l'equazione di cui ci siamo occupati a lezione, ovvero

$$3x + y - 2z = 0\,.$$

Calcola tre soluzioni di questa equazione, assegnando rispettivamenti i valori

$$y = 1 \text{ e } z = 2$$
$$y = -1 \text{ e } z = -2$$
$$y = 2 \text{ e } z = 1$$

e determinando il corrispondente valore di x.

Esercizio 2

Considera il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Utilizza la tecnica vista in classe per eliminare prima la variabile x dalla seconda e dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della prima equazione) e poi per eliminare la variabile y dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della nuova seconda equazione). A questo punto **calcola** la/le soluzioni del sistema. **Scrivi** poi la matrice dei coefficienti del sistema e **ripercorri** sulle sue righe le operazioni che hai svolto sulle equazioni.

Esercizio 3

Sia p un polinomio a coefficienti interi, $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Qui $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi.

Ricorda i seguenti fatti:

- un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ si dice una *radice* per p se vale che $p(r) = 0$;
- se un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ è una radice per p, allora se scriviamo $r = s/t$ dove s e t sono numeri interi primi tra di loro abbiamo che s divide a_0 e t divide a_n; pertanto le possibili candidate radici di p in $\mathbb{Q}$ si ottengono considerando tutte le possibili frazioni con al numeratore un divisore di a_0 e al denominatore un divisore di a_n (bisogna considerare, per ogni frazione, anche quella con segno opposto);

- per il teorema di Ruffini, un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ è una radice per p se e solo se p si può scrivere come $p(x) = (x-r)\cdot q(x)$ dove q è un altro polinomio (possiamo ottenere q attraverso l'algoritmo di divisione tra polinomi).

Ricorda inoltre che

- se $p = ax^2 + bx + c$ è un polinomio di secondo grado e se r_1 ed r_2 sono soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c = 0$, allora vale che $p = a(x-r_1)(x-r_2)$.

Scomponi ciascuno dei seguenti polinomi in un prodotto di fattori lineari:

$$p = x^3 - 2\,x^2 - x + 2\,,$$
$$p = 4\,x^3 - 7\,x + 3\,,$$
$$p = 12\,x^3 - 20\,x^2 - x + 6\,,$$
$$p = x^3 - x^2 - 12\,x\,.$$

Esercizio 4

Considera l'insieme V delle coppie ordinate di numeri $\binom{a}{b}$ di numeri reali, ovvero

$$V := \left\{ \binom{a}{b} \,:\, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ad esempio sono elementi di V le coppie $\binom{1}{2}$, $\binom{-5}{3}$, $\binom{\sqrt{3}}{0.34}$. L'insieme V è anche denotato $\mathbb{R}^2$.

Date due coppie $\binom{a}{b} \in V$ e $\binom{c}{d} \in V$, definiamo la loro somma come

$$\binom{a}{b} + \binom{c}{d} := \binom{a+c}{b+d}\,.$$

Notiamo quindi che anche la somma $\binom{a}{b} + \binom{c}{d}$ è un elemento di V. **Dimostra** che questa operazione di somma gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa.

Data una coppia $\binom{a}{b} \in V$ e un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo la moltiplicazione della coppia $\binom{a}{b}$ per lo scalare[1] λ come

$$\lambda \cdot \binom{a}{b} := \binom{\lambda\, a}{\lambda\, b}\,.$$

Notiamo quindi che anche $\lambda \cdot \binom{a}{b}$ è un elemento di V. **Dimostra** che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $\binom{a}{b}, \binom{c}{d} \in V$ valgono le proprietà distributive

$$\lambda \cdot \left(\binom{a}{b} + \binom{c}{d} \right) = \lambda \cdot \binom{a}{b} + \lambda \cdot \binom{c}{d}\,,$$
$$(\lambda + \mu) \cdot \binom{a}{b} = \lambda \cdot \binom{a}{b} + \mu \cdot \binom{a}{b}\,.$$

[1] Qui "scalare" è sinonimo di "numero reale".