

Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2025/26
Prova scritta del 19.01.2026

Cognome	Nome

- (1) **(7 punti)** (a) Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale.
(b) Si dia la definizione di rango di una matrice
(c) Si enunci e si dimostri il teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari (senza la parte riguardo alla dipendenza delle soluzioni dai parametri liberi).

(2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(1 punto)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(4 punti)** Si determinino una base di $\ker(f)$, una base di $\text{im}(f)$, e le dimensioni di $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$.
Si determini, se esiste, un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(f)$ tale che $3x_1 = 2x_2$.

(c) **(3 punti)** Si trovi un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ sia compatibile.

Considerato il sistema lineare per tale specifico valore di α , si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L_A .

Si calcoli la matrice di cambio di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

- (4) (a) **(3 punti)** Si determinino equazioni cartesiane di un piano $H \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per il punto $P = (1, 1, 0)$ e che intersechi in un punto la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

- (b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino la retta r e il piano H :

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad H: \{x + y + 2z = 2\}$$

Descrivere la posizione reciproca tra r e H .

Se r ed H sono incidenti in un solo punto P , determinare tale punto e trovare una retta s che interseca r ed H , ma che non passa per P .

Se r è parallela ad H ed $r \cap H = \emptyset$, trovare un piano K che contenga r e sia parallelo ad H .

Se r è contenuta in H , trovare un piano K tale che $r = H \cap K$.