

FISICA DELL'AMBIENTE

Testi:

Elementi di fisica: Elettromagnetismo & Onde
Mazzoldi, Negro, Voci (3^a edizione)

Fondamenti di fisica: Halliday Resnick
(elettromagnetismo & onde)

Docente:

Matteo Costanzi (mcostanzi@units.it)

Grandezze Scalari & Vettoriali

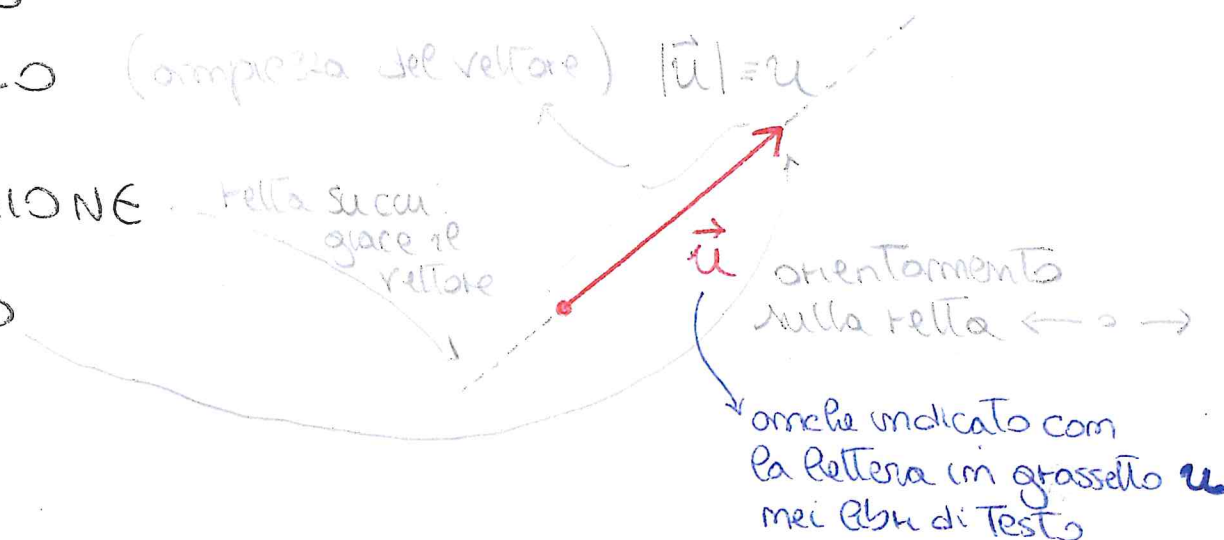
• Grandezze Scalari:

Sono le grandezze che sono definite da un solo valore numerico (espresso in un'opportuna unità di misura).

Es: Temperatura, massa, tempo, energia

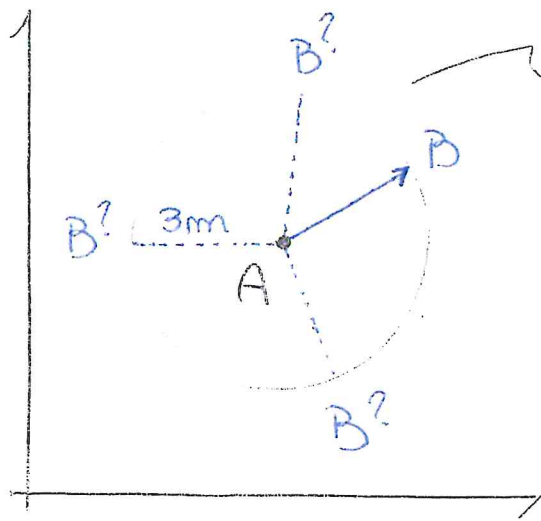
• Grandezze Vettoriali:

Sono grandezze caratterizzate da:

- MODULO (ampiezza del vettore) $|\vec{u}| = u$
 - DIREZIONE
 - VERSO
- 
- The diagram shows a red vector $\vec{u}$ starting from a point on a dashed line and pointing upwards and to the right. A curved arrow indicates the direction of the vector. A horizontal line with arrows at both ends is labeled 'orientamento sulla retta'. A blue arrow points to the vector with the text 'omne indicato con la lettera in grassetto $\vec{u}$ nei libri di testo'.

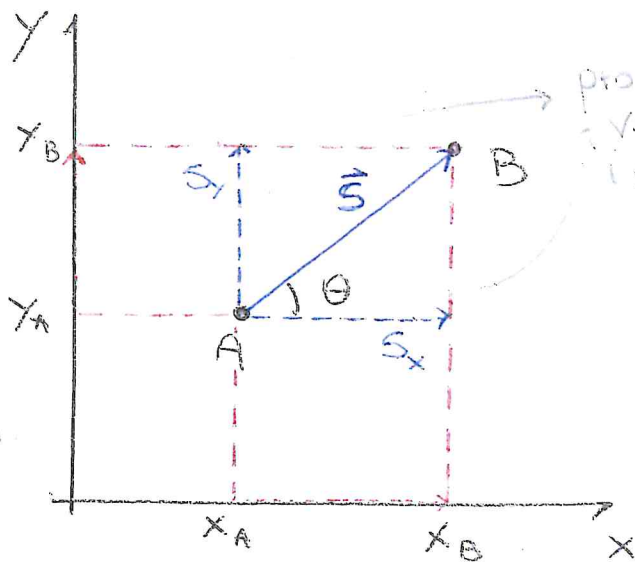
Es: Vettore spostamento, vettore velocità, vettore accelerazione
⚡ il campo magnetico, ...

Immaginiamo che una persona si sposti in una stanza da un punto A ad un punto B distante 3m. Per sapere la posizione finale della persona non è sufficiente specificare la distanza percorsa ma anche la direzione ed il verso



Noto solo il modulo dello spostamento non posso sapere la posizione finale della persona

- Definito un sistema di riferimento (cioè un sistema di coordinate) un vettore può essere espresso tramite le sue componenti lungo gli assi di riferimento. Ad esempio nel piano 2D:



proiezione del vettore $\vec{S}$ lungo i 2 assi cartesiani

$$\tan \theta = \frac{S_y}{S_x}$$

Modulo

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

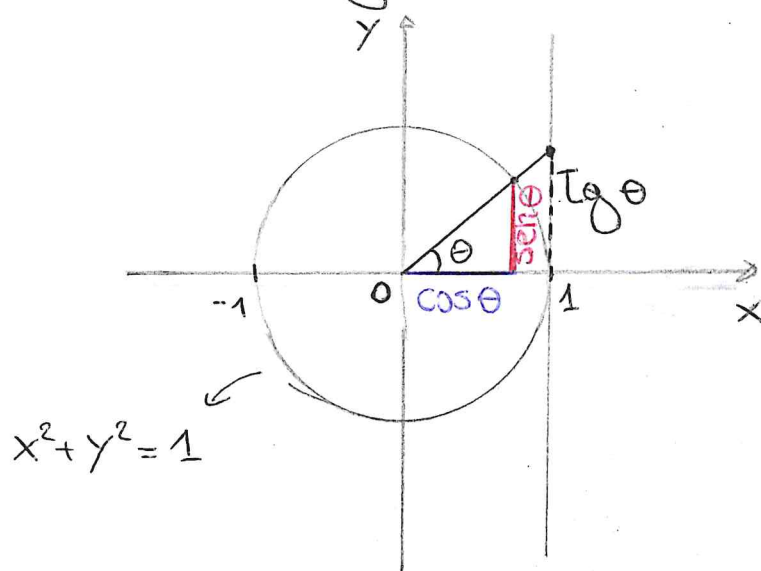
Il vantaggio di scegliere una base ortogonale

moduli del vettore $|\vec{S}| = S$

$$\vec{S} = \left(\underbrace{x_B - x_A}_{\text{componente lungo } x}, \underbrace{y_B - y_A}_{\text{componente lungo } y} \right) = \left(S \cos \theta, S \sin \theta \right)$$

Vedi funzioni Trigonometriche

• Funzioni Trigonometriche



- Data la circonferenza unitaria, ogni punto della circonferenza è definito da 1 parametro:
l'angolo: $\theta = \frac{l}{r}$ [rad]

$\cos \theta$ = proiezione raggio sull'asse x

$\sin \theta$ = proiezione raggio sull'asse y

$\tan \theta$ = rapporto proiezioni asse x asse y = $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

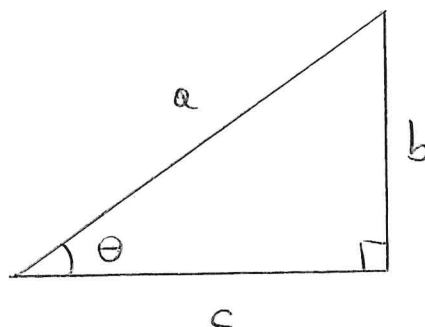
deriva utilizzando
rapporto cateti di
triangoli simili

→ Quindi per un triangolo rettangolo generico:

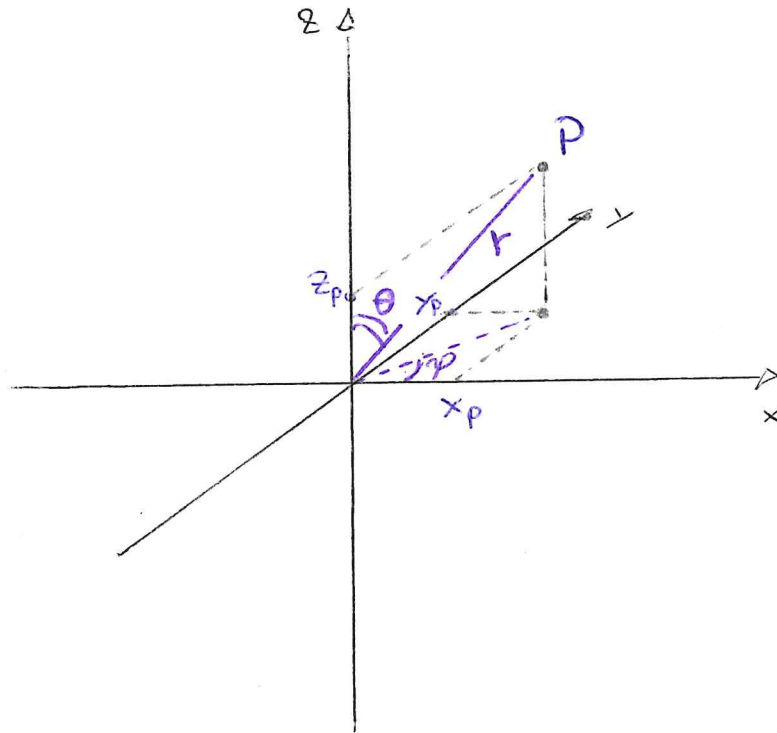
$$b = a \sin \theta$$

$$c = a \cos \theta$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta} = \tan \theta$$



* Sistemi di Coordinate in 3D



→ Sistema Cartesiano:

$$P \equiv (x_p; y_p; z_p)$$

→ Sistema Sferico

$$P \equiv (r; \theta; \varphi)$$

↓
angolo rotore $\vec{r}$
con asse z

angolo tra proiezione di $\vec{r}$ su piano
xy ed asse y

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

→ Relazione sistemi cartesiano - sferico:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

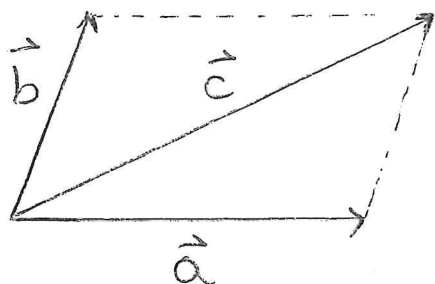
$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

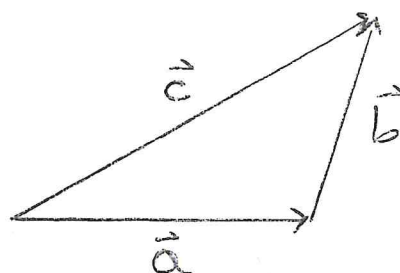
∅ Somma di Vettori

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Graficamente



oppure



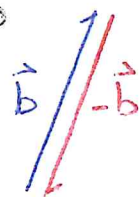
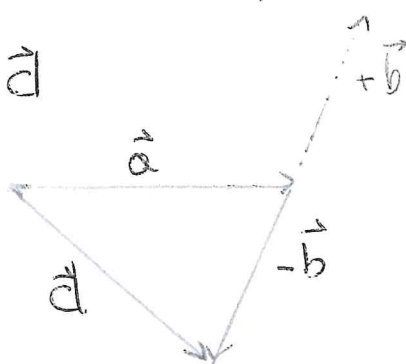
Valgono le proprietà:

- commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- associativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Es: Compilo uno spostamento lungo $\vec{a}$ e poi lungo $\vec{b}$; lo spostamento totale sarà dato dal vettore $\vec{c}$

La differenza tra due vettori viene fatta in modo analogo notando che $-\vec{b}$ ha lo stesso modulo e direzione di $\vec{b}$, ma verso opposto, ovvero

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$

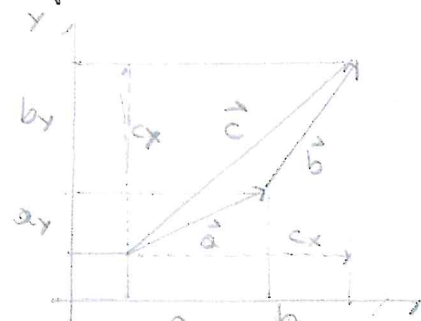


Usando le componenti del vettore possiamo esprimere la somma come somma delle componenti:

Es:

$$\vec{c} = (c_x, c_y) = (a_x + b_x; a_y + b_y)$$

$$\vec{d} = (d_x, d_y) = (a_x - b_x; a_y - b_y)$$



⊗ Vettori Unitari $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ o $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ o $(\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z)$

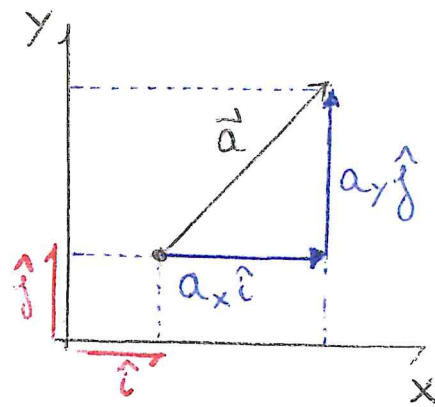
I vettori unitari, o versori, sono vettori di modulo 1;
I versori di un sistema di coordinate cartesiane hanno
~~una~~ direzione e verso uguale a quelli degli assi

di riferimento: $\hat{i} = (1, 0, 0)$ $\hat{j} = (0, 1, 0)$ $\hat{k} = (0, 0, 1)$ *

Utilizzando la regola per sommare i vettori,
possiamo usare i vettori unitari per descrivere
un altro vettore.

Es: nel piano 2-d

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$



Il prodotto di uno scalare
per un vettore è ancora
un vettore, avente la stessa

direzione e modulo dato dal prodotto
dello scalare per il modulo del vettore
di partenza:

$$\vec{b} = s \vec{a} = (s a_x, s a_y)$$

* Per un generico sistema di coordinate posso sempre
definirne i versori. E.g. in coordinate sferiche avremo
i versori $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$, che sono ortogonali tra loro p.to per p.to.

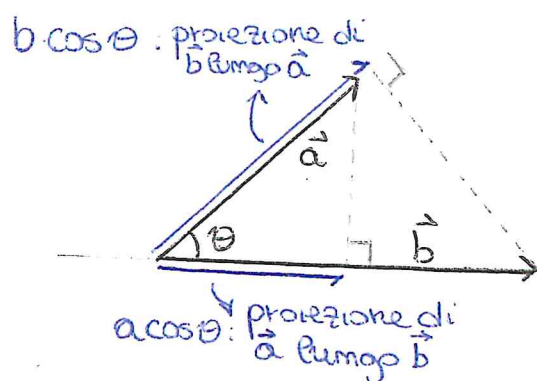
Si noti che valgono le relazioni:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{r} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \hat{\theta} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \hat{\varphi} \quad \text{dove } \vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

◊ Prodotto Scalare

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

il risultato di un prodotto scalare È UNO SCALARE



- Se i due vettori sono ortogomali: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ poiché il $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
- Se i due vettori sono paralleli $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$, il prodotto scalare è "massimo" in quanto $\cos \phi = 1$

Vale la proprietà commutativa & distributiva

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Usando le componenti dei vettori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\begin{aligned} & \hat{a} \cdot \hat{b} = (\hat{a}_x \hat{i} + \hat{a}_y \hat{j}) \cdot (\hat{b}_x \hat{i} + \hat{b}_y \hat{j}) = \\ & = \hat{a}_x \hat{b}_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + \hat{a}_x \hat{b}_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + \\ & + \hat{a}_y \hat{b}_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + \hat{a}_y \hat{b}_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) \end{aligned}$$

Il Prodotto Vettoriale (vedremo in seguito)

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \rightarrow$ il prodotto vettoriale dà come risultato 1 vettore

• Modulo:

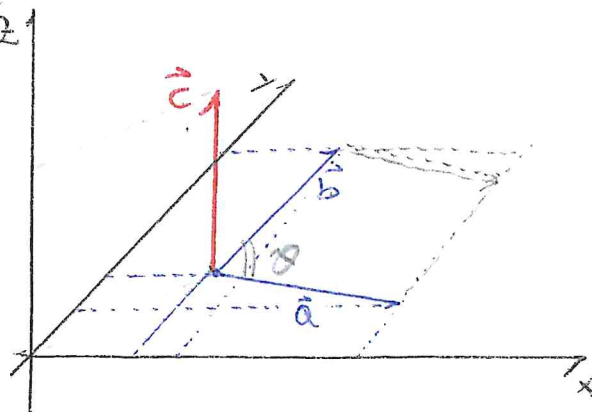
$|\vec{c}| = c = ab \sin \theta$

area parallelogramma
definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$\theta = 90^\circ$
 $\vec{a} \perp \vec{b}$

• Direzione:

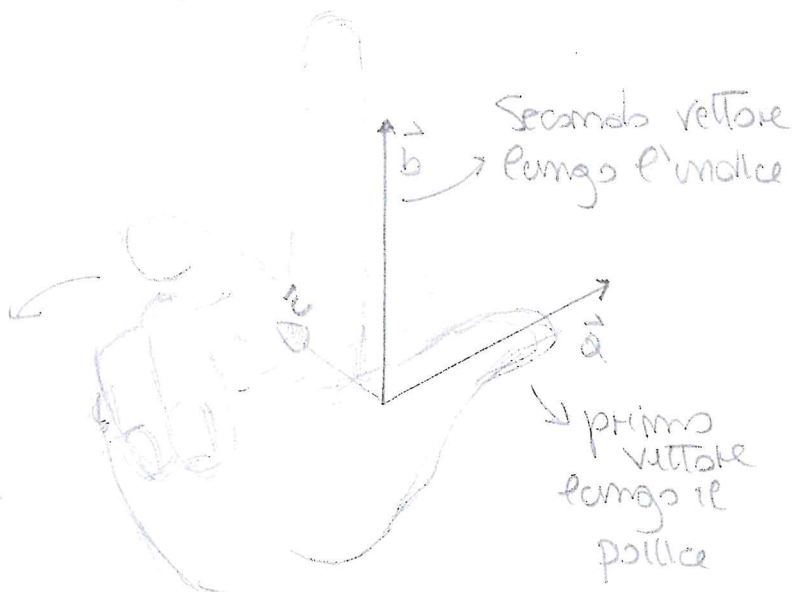
Perpendicolare al piano
definito da $\vec{a}$ & $\vec{b}$



• Verso:

Regola della mano destra

le medie,
messa $\perp$
al pollice ed
indice dà il
verso di $\vec{c}$



$\rightarrow$ Dalla regola della mano destra segue che:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

• Usando i versori abbiamo che:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j}) = (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

NB per semplicità
ho preso 2 vettori
che giacciono sul
piano xy

il vettore
risultante è
 $\perp$ al piano xy

→ in genere per svolgere l'operazione di prodotto vettoriale in 3D, si calcola il determinante della matrice:

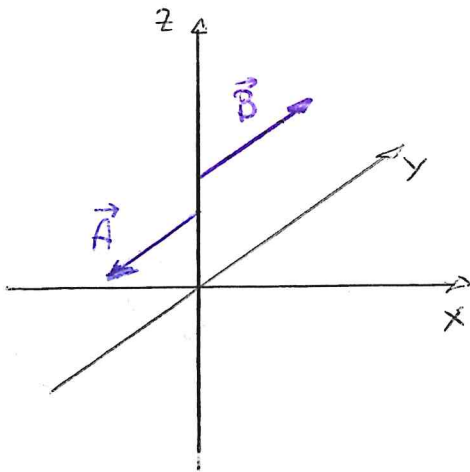
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

• Convenzione simboli

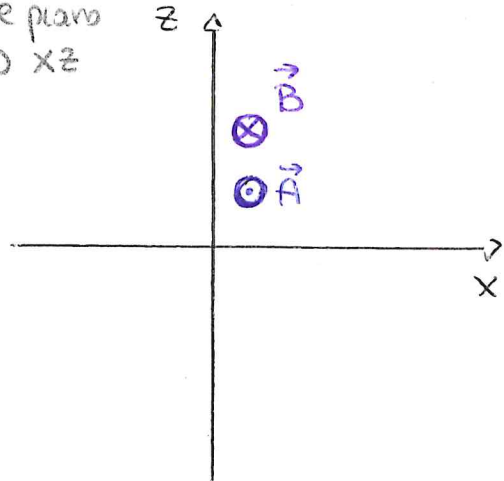
⊗ ≡ vettore entrante

⊙ ≡ vettore uscente

E.g.
In
prospettiva

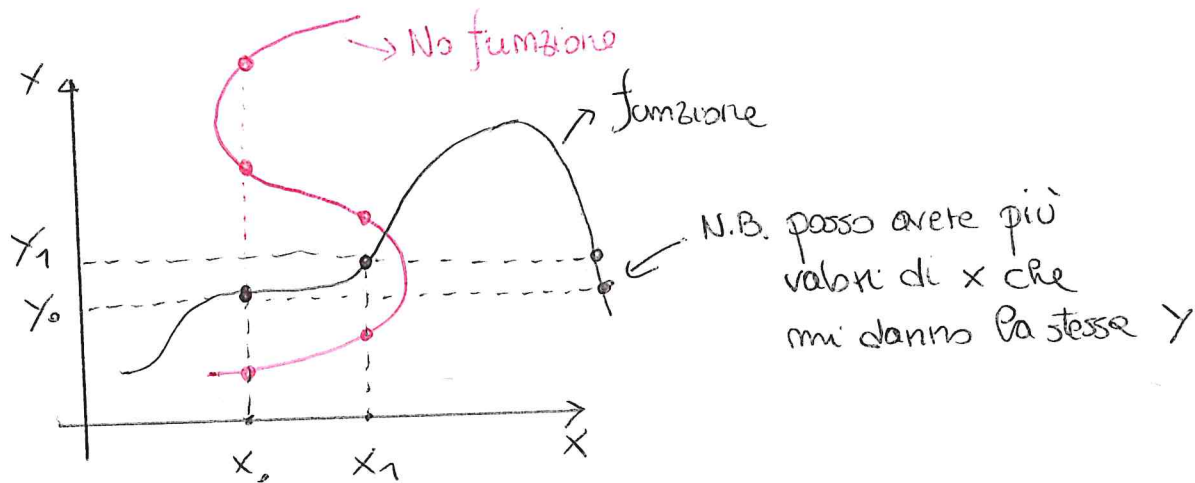


Not plane
2D xz

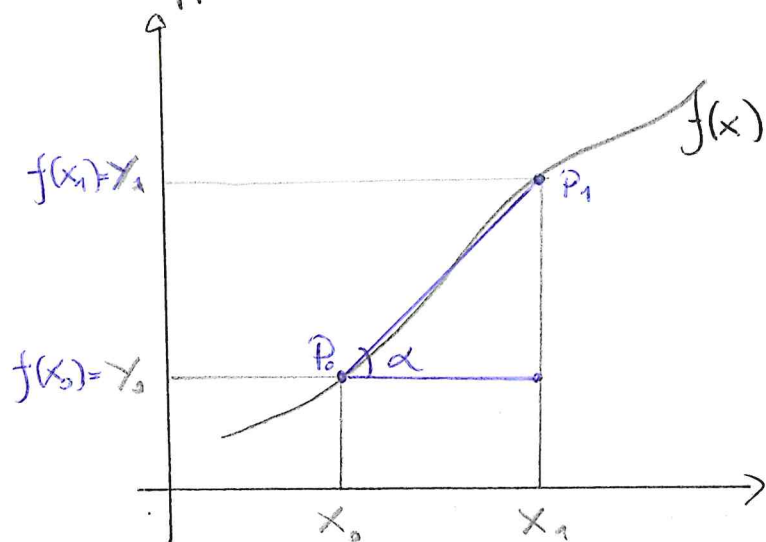


* Funzione $f: D \rightarrow C$ esiste se
 $\forall x \in D \exists ! y: y = f(x)$
 Per ogni x nel Dominio della funzione, esiste uno solo y tale che $y = f(x)$.
 y è la variabile dipendente $\in C$ (Codominio).
 x è la Variabile Indipendente.

→ ovvero la funzione f è una relazione fra 2 insiemi (dominio e codominio) che associa ad ogni elemento del dominio uno, ed uno solo, elemento del codominio.



• Rapporto incrementale & derivata



$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

→ Riducendo Δx sempre più, il valore $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ sarà sempre più prossimo al valore della tangente nel punto P

↓
ovvero la pendenza della funzione nel p.to P

$$\operatorname{tg} \alpha \Big|_P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} \text{ o } y'(x_0)$$

derivata della funzione nel p.to x_0

• Es

$f(x) = Kx^2$ calcolare la derivata nel p.to generico x :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{K(x + \Delta x)^2 - Kx^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{Kx^2} + K\Delta x^2 + 2K\Delta x \cancel{x} - \cancel{Kx^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (K\Delta x + 2Kx)}{\cancel{\Delta x}} = 2Kx$$

• Alcune derivate note:

$$y = k$$

$$y' = 0$$

$$y = x^m$$

$$y' = m x^{m-1}$$

eg.

$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

• Proprietà Derivate:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$y = f(g(x))$$

$$y' = f'(g(x))g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

• Integrale

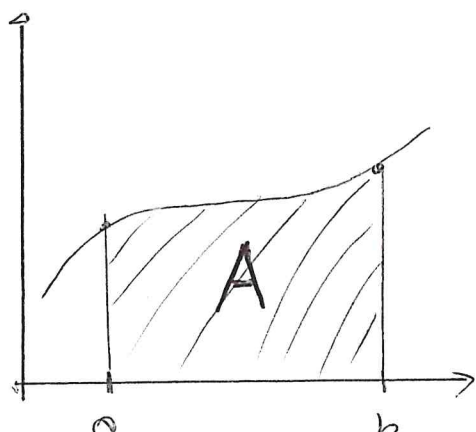
→ Operatore che associa a' una funzione la sua antiderivata
ovvero : (o primitiva)

$F(x)$ e' e' integrale di $f(x)$ se $\frac{dF}{dx} = f(x)$

eg.

$\frac{df}{dx}$	$f(x)$	$\overset{\text{primitiva}}{\uparrow}$ $F(x)$
0	1	$x + C$
1	x	$\frac{x^2}{2} + C$
$2x$	x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
$m x^{m-1}$	x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + C$

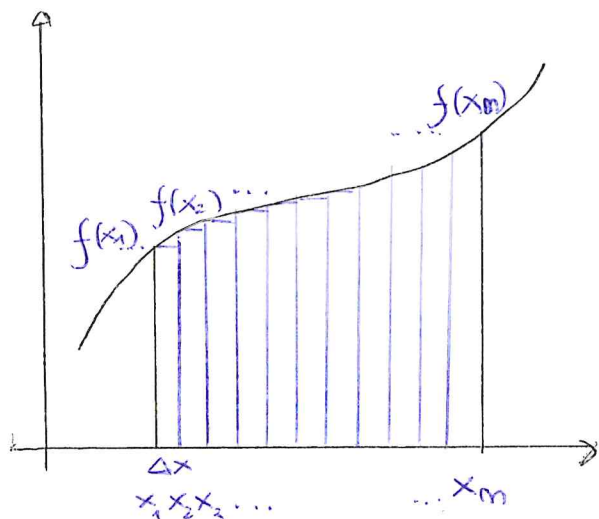
→ Può anche essere visto come l'operatore che associa ad una funzione l'area sottesa dal suo grafico, entro un dato intervallo :



$$A = \int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \frac{dF(x)}{dx} = F(b) - F(a)$$

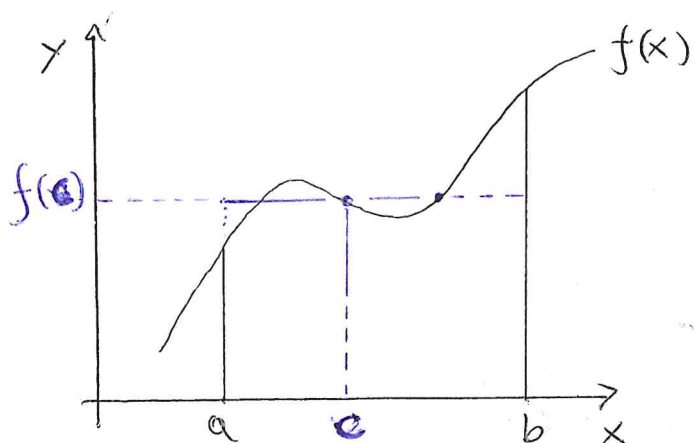
$\downarrow$ Integrale definito $\uparrow$ primitiva
 $\downarrow$ Teorema fondamentale del calcolo integrale

→ operativamente possiamo pensare all'operazione di integrazione come alla somma di aree infinitesime;



$$A = \sum_{i=1}^m f(x_i) \Delta x \xrightarrow{\lim_{\Delta x \rightarrow 0}} = \int_a^b dx f(x)$$

• Teorema del Valor Medio (o della Media Integrale)



Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua

$\exists c \in [a, b]$:

$$\int_a^b dx f(x) = (b-a) f(c)$$

Il Teorema non ci dice quanto vale c , ma ci assicura che esiste dentro l'intervallo $[a, b]$

La grandezza $f(c) = \frac{\int_a^b dx f(x)}{b-a}$ è detta media integrale

(o valor medio della funzione) nell'intervallo $[a, b]$