

* Campo Scalare

Funzione che associa ad ogni p.to dello spazio un valore scalare: $f(x, y, z)$

e.g. il valore della pressione o temperatura in ogni punto di una stanza

→ Possiamo definire per un campo scalare (in genere per una funzione a più variabili) la derivata parziale: $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\partial_x f$ che ci permette di studiare

la variazione del campo lungo una sola direzione.

Operativamente si trattano tutte le variabili, tranne quella rispetto alla quale si sta derivando, come costanti;

e.g.

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

$$\partial_x f = 3x^2 y^2 z \quad \partial_y f = x^3 2y z \quad \partial_z f = x^3 y^2$$

calcoliamo anche

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2z \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{\underline{6x^2yz}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \underline{\underline{3x^2y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3z \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \underline{\underline{6x^2yz}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \underline{\underline{2x^3y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \underline{\underline{3x^2y^2}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \underline{\underline{2x^3y}}$$

non importa
l'ordine con
cui differenzio
la funzione
(Teorema di
Schwarz)

✓ Campo Vettoriale

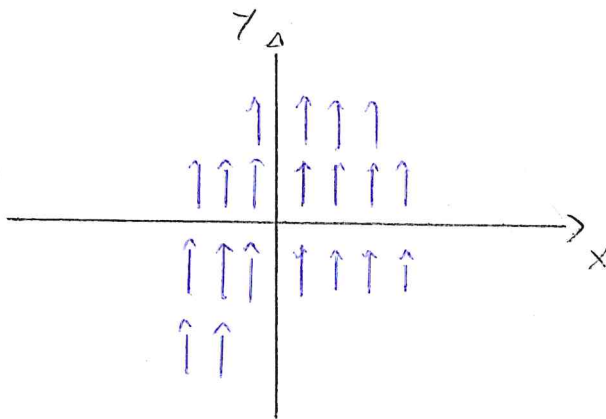
Funzione che associa ad ogni punto dello spazio un vettore: $\vec{F}(x, y, z)$

e.g. il campo di velocità del vento, o delle correnti marine, o come vedremo il campo elettrico e magnetico.

Es in 2D

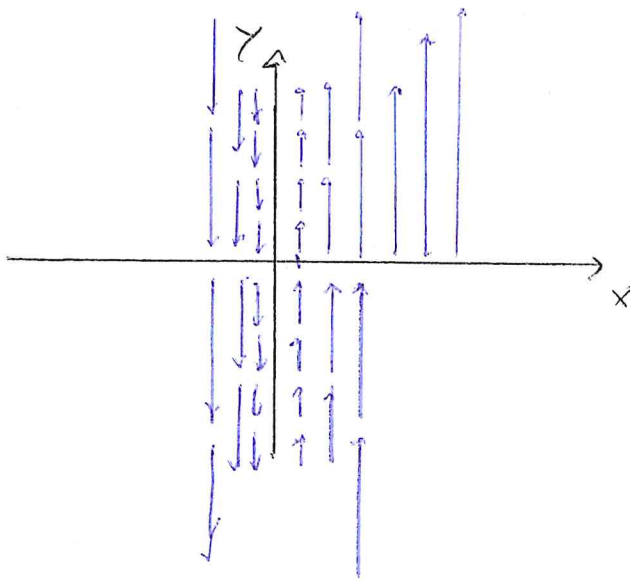
$$\vec{F}(x, y) = k \hat{j} = (0, k)$$

↙
Valore costante
∀ p.to, ed in
direzione dell'asse y



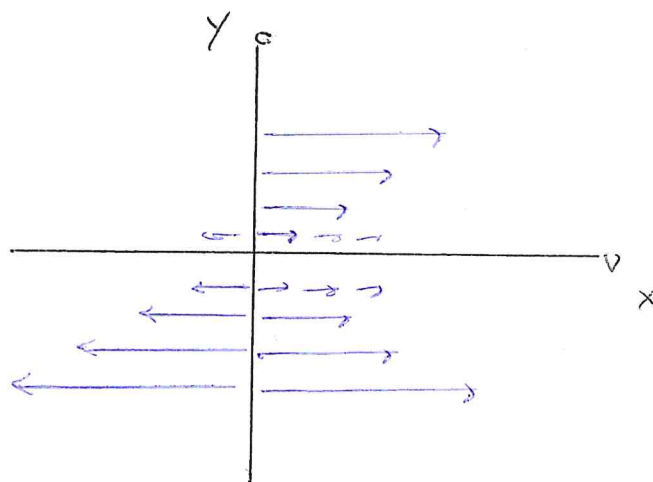
$$\vec{F}(x, y) = x \hat{j} = (0, x)$$

↙
Cambia al
valore di x ,
ed ha direzione
costante lungo y



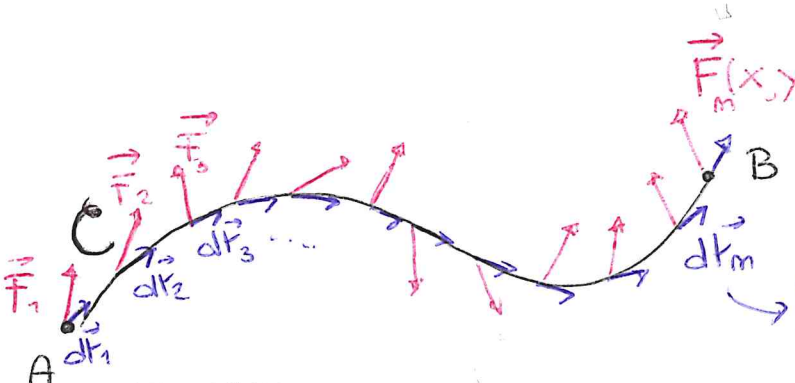
$$\vec{F}(x, y) = y \hat{i} = (y, 0)$$

↙
Varia con il
valore di y , e
ha direzione lungo x



* Integrali Curvilinei:

Dato un campo vettoriale possiamo studiarne l'effetto lungo un percorso (oia curva) come somma delle proiezioni del campo sugli spostamenti infinitesimi $d\vec{r}$:



$\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_m \cdot d\vec{r}_m = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i =$ nel limite di $dt \rightarrow 0$

$$= \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \equiv \text{Integrale curvilineo del campo vettoriale } \vec{F} \text{ lungo la curva } C$$

es:

Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ lungo il percorso C è dato dall'integrale curvilineo:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

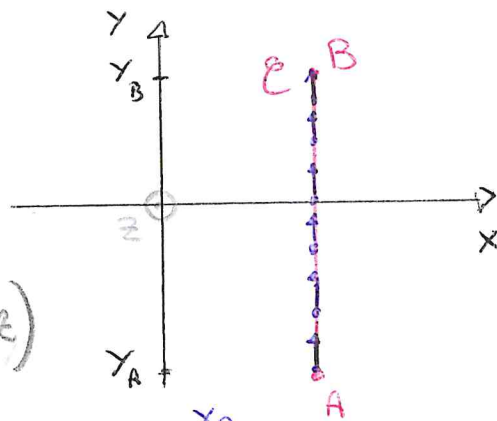
N.B. L'integrale curvilineo è un concetto diverso dall'integrale visto in precedenza, infatti non esprime un'area, e si applica a campi vettoriali.

Esempio:

$$\vec{F} = K \hat{y}$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (dx, dy, dz)$$

$$\int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{F} = \int_{y_A}^{y_B} F_y dy = \int_{y_A}^{y_B} K dy = K(y_B - y_A)$$



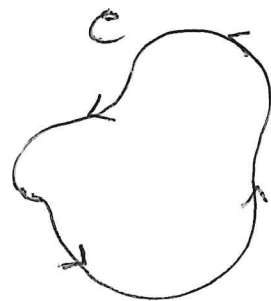
→ Se percorso C al contrario:

$$\int_{B \rightarrow A} \vec{F} \cdot d\vec{F} = \int_{y_B}^{y_A} K dy = K(y_A - y_B) = - \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{F}$$

uguale ed opposto al percorso inverso.

Se la curva C è una curva chiusa,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{F} \equiv \text{Circulazione del campo } \vec{F} \text{ lungo la curva chiusa } C$$



⇒ Campo Conservativo o Irrotazionale ① Dati 2 punti qualsiasi

$A \& B$, Se $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F}$ è indipendente dal percorso che va da $A \rightarrow B$

ovvero se la circolazione $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{F} = 0 \quad \forall C$ il campo

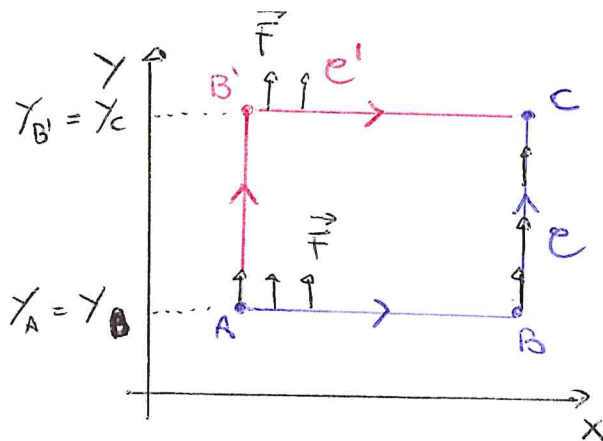
$\vec{F}$ si dice conservativo o irrotazionale.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{F} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{F} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F} = 0$$

∴ uguaglianza dei due enunciati

Esempio:

$$\vec{F} = K \hat{y} = (0; K)$$

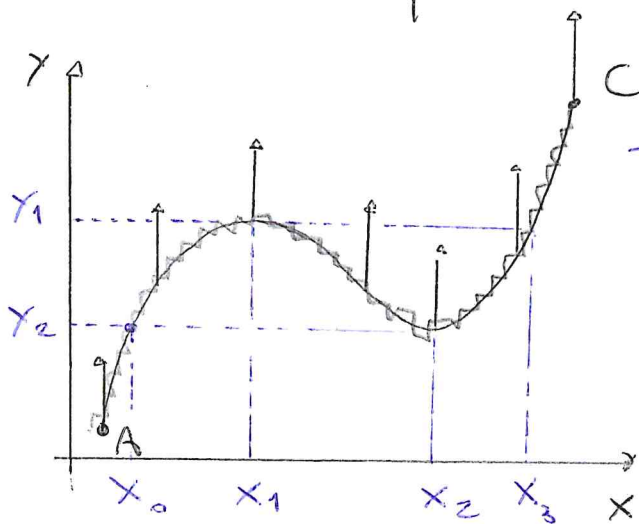


$$\int_{A \rightarrow C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + K(y_C - y_B)$$

$\vec{F} \perp d\vec{r}$ lungo $\overline{AB}$

$$\int_{A \rightarrow C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K(y_{B'} - y_A) + 0 = \int_{A \rightarrow C} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \text{Ottengo lo stesso risultato percorrendo } C \text{ e } C', \text{ ma perch\'e il campo sia conservativo deve valere } \forall C$$

Consideriamo quindi una curva generica Tra A & C



Scompongo la mia curva in tanti spostamenti $\parallel$ o $\perp$ all'asse x (o y)

Solo gli spostamenti lungo y contribuiscono all'integrale ($\vec{F} \cdot d\vec{r} = K$) mentre quelli $\parallel$

Inoltre il contributo Tra x_0 e x_1 e' uguale ed opposto al contributo Tra x_1 e x_2 :

$$\int_{x_0}^{x_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K(y_1 - y_2)$$

→ Ovvero conta solo il dislivello

$$\text{Totale Tra A \& C : } \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} = K(y_C - y_A) = K(y_1 - y_2)$$

↳ il campo e' conservativo!

Operatori Differenziali:

- Gradiente:

Operatore che si applica ad un campo scalare e dà come risultato un campo vettoriale la cui direzione indica la direzione di massima variazione del campo, ed il modulo la rapidità con cui il campo cresce in quella direzione.

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} ; \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

"nabla"

↓
Campo
scalare $f(x,y,z)$

e.g. Temperatura o pressione

Nabla:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

→ possiamo immaginarlo
come una sorta di vettore
le cui componenti sono
le derivate parziali lungo
gli assi

Esempi gradiente:

- **Funzione Quadratica:**

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{Assume valori costanti lungo circonferenze centrate nell'origine}$$

Gradiente:

$$\nabla \phi(x, y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (2x, 2y).$$

E.g. In (1,2): $\nabla \phi(1,2) = (2,4)$

☛ Significa che nel punto (1,2) la funzione cresce più velocemente nella direzione del vettore (2,4), cioè "verso l'esterno" rispetto all'origine.

Infatti i gradienti puntano radialmente verso l'esterno.

- **Funzione Lineare:**

$$\psi(x, y, z) = x + 2y \rightarrow \text{Assume valori costanti lungo le rette } x = -\frac{1}{2}x + c$$

Gradiente:

$$\nabla \psi(x, y, z) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = (1, 2, 0).$$

il gradiente è **costante** e non dipende dal punto.

☛ La funzione cresce sempre nella direzione del vettore (1,2,0), cioè se ti sposti in quella direzione il valore aumenta più rapidamente.

⇒ Campo Conservativo (2)

Un campo vettoriale $\vec{F}$ è conservativo se

$$\exists \phi(x, y, z) : \vec{F} = \vec{\nabla} \phi$$

campo scalare

In questo caso viene detto "potenziale"

(*) giro pagina

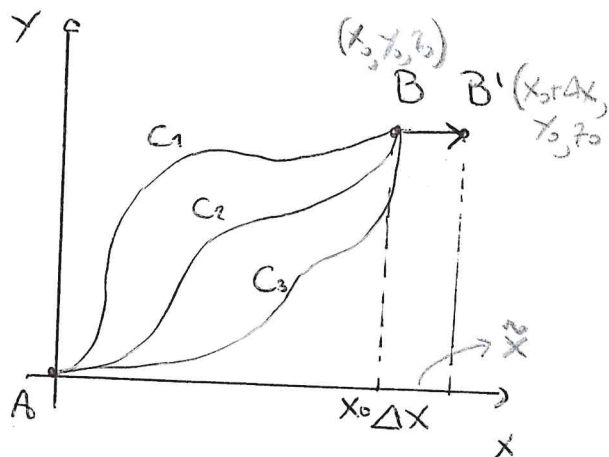
equivalente a dire che

$$\phi(B) - \phi(A) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F}$$

∴

Sia $\vec{F}$ conservativo, fissato un p.to A, l'integrale curvilineo $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F} = \Phi(B)$ è una funzione che dipende solo da B (poiché $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{F}$ non dipende dal percorso);

Posso dunque calcolarmi il rapporto incrementale di $\phi(B)$ a seguito di uno spostamento Δx lungo l'asse x:



$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(B') - \phi(B)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_A^{B'} \vec{F} \cdot d\vec{F} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F} + \int_B^{B'} \vec{F} \cdot d\vec{F} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{F}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_B^{B'} \vec{F} \cdot d\vec{F}}{\Delta x} \end{aligned}$$

Posso scomporre il percorso da A a B' in A-B-B' poiché campo conservativo

Integrale "ordinario" $\vec{F}$

uso Teorema del valor medio

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F_x dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \bar{F}_x(\tilde{x}) = \bar{F}_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_B$$

$x_0 < \tilde{x} < x_0 + \Delta x$

rimangono costanti

$$\vec{F} \cdot d\vec{F} = F_x(x_0, y_0, z_0) dx$$

poiché mi sposto lungo x

→ analogamente se mi sposto lungo y e z ottengo

$$F_y = \partial_y \phi \quad \& \quad F_z = \partial_z \phi$$

⇒ Mettendo insieme le componenti $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$ c.v.d.

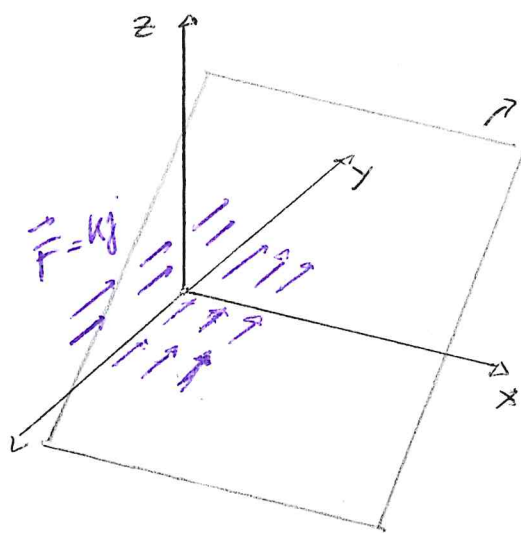
Es: Calcolare il potenziale del campo $\vec{F} = K\hat{j}$
il campo conservativo $\vec{F} = K\hat{j} = \vec{\nabla} \phi$

ovvero $\partial_x \phi = 0 \quad \partial_y \phi = K \quad \partial_z \phi = 0$

→ integrando

$$\phi(x, y, z) = Ky + C$$

il potenziale corrisponde ad
un piano inclinato lungo y



$$\phi(x, y, z) = Ky + C$$

e.g. se $\vec{F}$ forza
di gravità con
 $K = m\vec{g}$, l'energia
potenziale gravitazionale
vale sarà $U = mgh$
con h altezza dal
suo