

◊ Rotore:

Operatore differenziale che si applica ad un campo vettoriale e ritorna un campo vettoriale

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

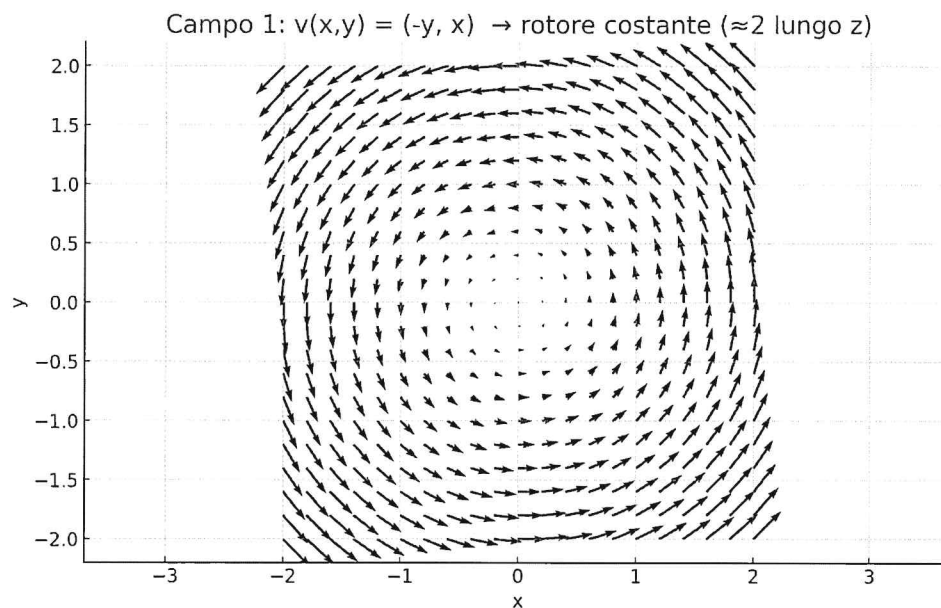
prodotto
vettoriale tra

$$= (\partial_y F_z - \partial_z F_y) \hat{i} + (\partial_z F_x - \partial_x F_z) \hat{j} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \hat{k}$$

✓ Misura la tendenza di un campo vettoriale a ruotare attorno ad un punto nello spazio.

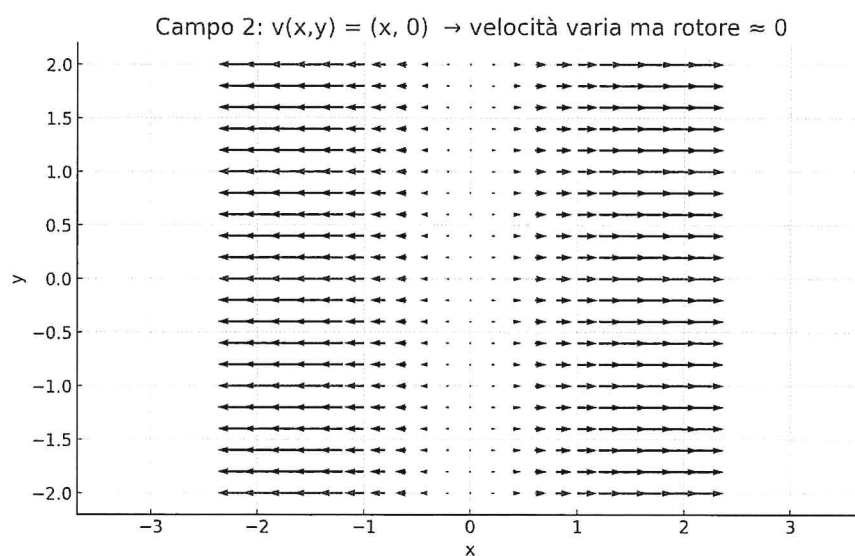
Il suo modulo indica la velocità di rotazione intorno ad un punto.

Esempi Rotore:



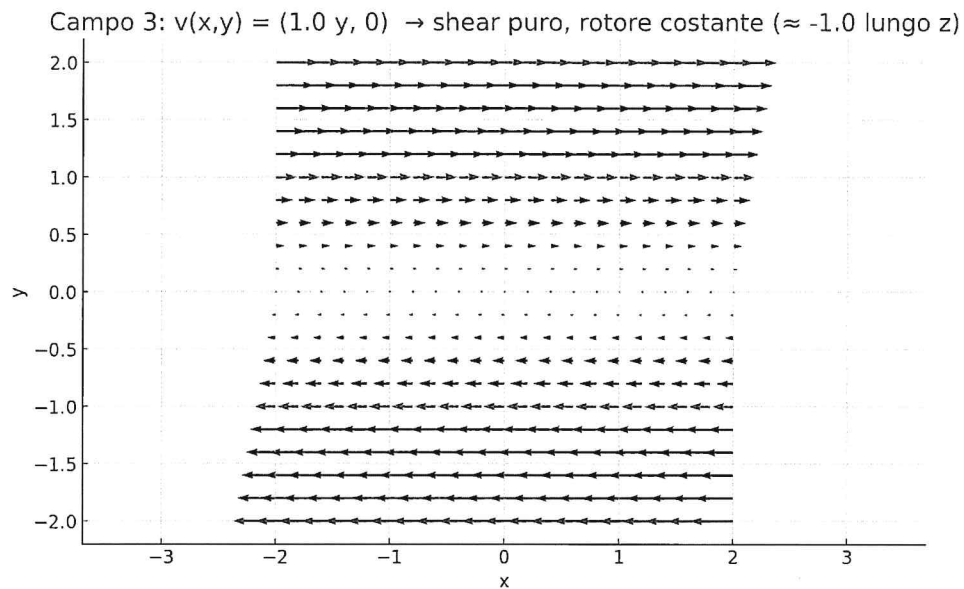
1. $v_1(x,y) = (-y, x)$ ← *componente 2 unica $\neq 0$*
○ $(\nabla \times v_1)_z = \partial_x(x) - \partial_y(-y) = 1 - (-1) = 2$

- Interpretazione: **rotazione uniforme**; una girandola ruoterebbe ovunque allo stesso modo.



2. $v_2(x,y)=(x, 0)$

- Analitico: $(\nabla \times v_2)_z = \partial_x(0) - \partial_y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{\nabla} \times \vec{v}_2)_y = (\vec{\nabla} \times \vec{v}_2)_x$
- Interpretazione: la **velocità cresce con x** (il flusso accelera), ma **non c'è rotazione locale**: la girandola non gira.



3. shear puro $v_3(x,y)=(k y,0)$ con $k=1$:

- Analitico: $(\nabla \times v_3)_z = 0 - \partial_y(ky) = -k$ (qui -1).

Interpretazione fisica: il campo è uno shear — le linee sono parallele ma con velocità che varia linearmente con y . Una girandola immersa in questo campo **girerà** (rotazione uniforme) anche se il campo non è un “vortice circolare” come nel primo esempio: lo shear impone una coppia che fa ruotare gli oggetti.

◊ Campo Conservativo (o irrotazionale) 3)

Un campo è conservativo se il suo rotore

è nullo: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

→ Nota: Questa definizione e la definizione ① di campo conservativo ci fanno capire che c'è un collegamento tra circolazione e rotore

∴

Se $\vec{F}$ conservativo: $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$

Calcoliamo dunque il rotore

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

↳ Per il Teorema di Schwarz l'ordine delle derivate parziali

Es:

a) $\vec{F} = K \hat{j} = (0; K; 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0-0) \hat{i} + (0-0) \hat{j} + (0-0) \hat{k} = 0 \rightarrow \text{avremmo visto infatti che era conservativo}$$

b) $\vec{F} = x \hat{j} = (0; x; 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + (1-0) \hat{k} = \hat{k} \neq 0 \rightarrow \text{Non è conservativo}$$

c) $\vec{F} = x \hat{i} = (x; 0; 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = 0$$

◊ Divergenza

Operatore applicato ad un campo vettoriale che dà come risultato un campo scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

↪ Misura la tendenza di un campo vettoriale a convergere o divergere da un punto

- Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$ in un p.to il campo "esce", c'è una sorgente di campo
- Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ in un p.to il campo "entra", come in un pozzo
- Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad \forall \text{ p.to}$ il campo si dice Solenoidale, Tanto "entra" quanto "esce".

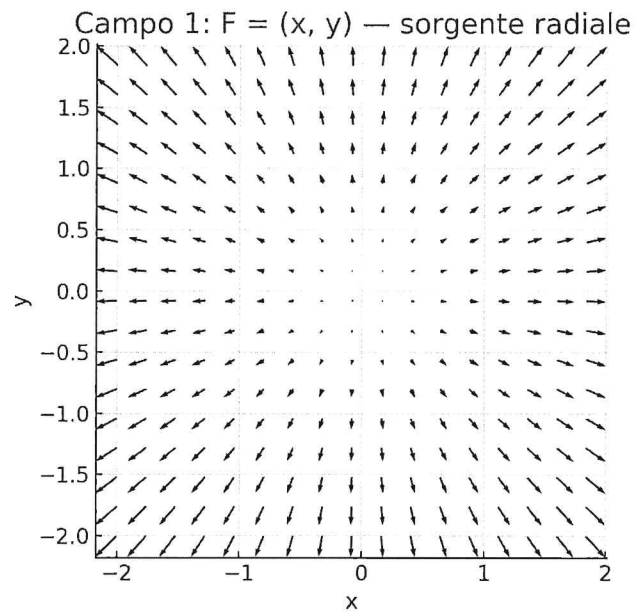
Es:

$$a) \vec{F} = k \hat{y} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$b) \vec{F} = x \hat{y} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 + \frac{\partial x}{\partial y} + 0 = 0$$

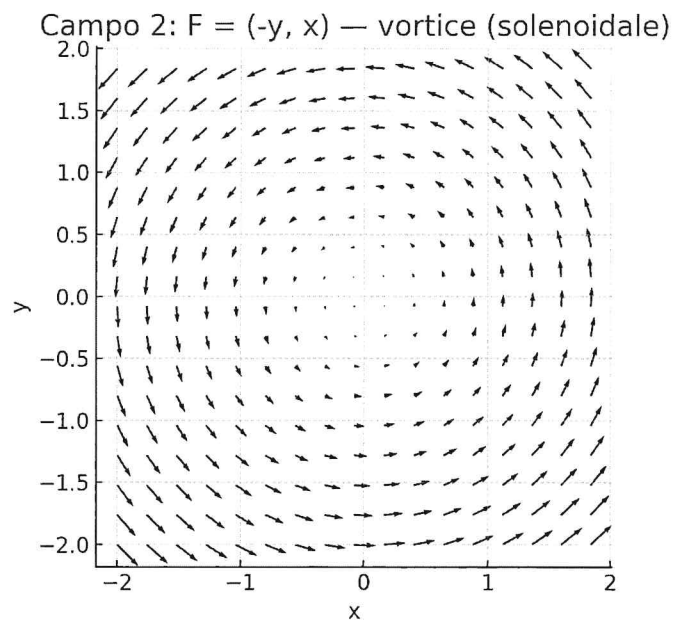
$$c) \vec{F} = x \hat{i} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + 0 + 0 = 1$$

Esempi Divergenza:



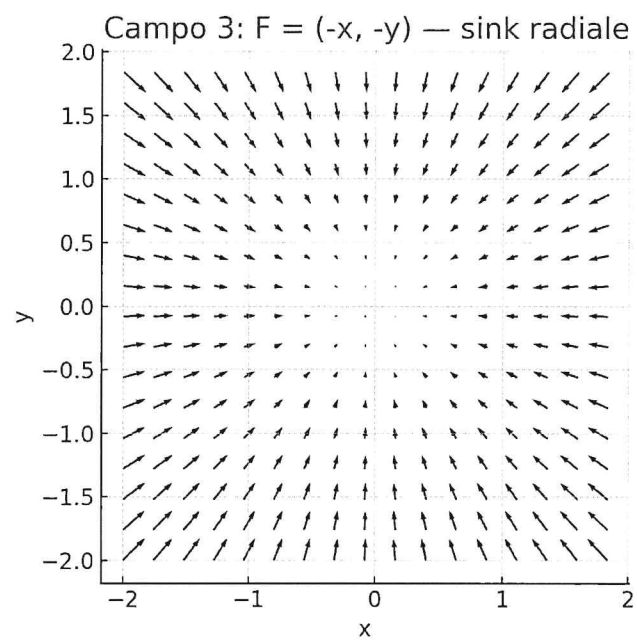
Campo 1: $F_1=(x,y)$: divergenza analitica =2.

È una **sorgente uniforme**: in ogni punto il campo "esce" radialmente.



Campo 2: $F_2=(-y,x)$: divergenza analitica =0.

È un **campo solenoidale** (vortice): il flusso ruota ma non si crea né si distrugge massa



Campo 3: $F_3=(-x,-y)$:
divergenza $=-2$. È un **pozzo (sink)** uniforme: il campo converge in ogni punto.

• Proprietà Operatori

1. $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$

2. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

3. $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = \nabla^2 f$ (Laplaciano)

→ per convenzione

$$\nabla^2 \vec{F} = \left(\nabla^2 F_x ; \nabla^2 F_y ; \nabla^2 F_z \right) \rightarrow \text{ovvero e' un vettore
le cui componenti
sono il laplaciano
delle componenti
del campo vettoriale}$$

4. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

→ da b) segue che un campo vettoriale solenoidale $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$
può essere espresso come rotore di un campo vettoriale
 $\vec{A}$ detto potenziale vettore; ovvero:

$$\text{se } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

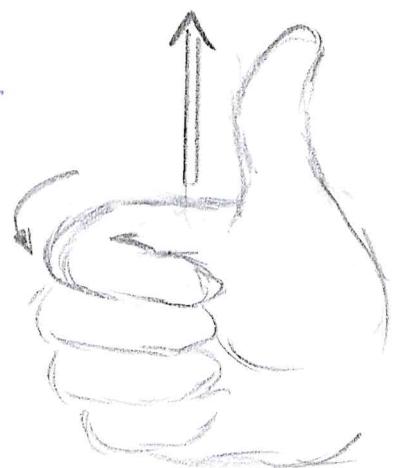
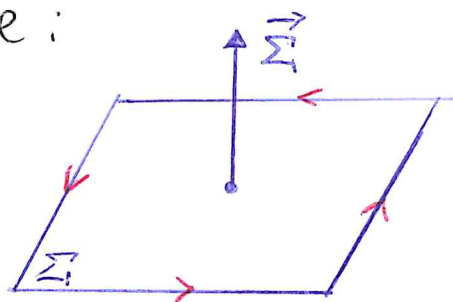
Infatti da b) segue $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

→ meglio detto al contrario: il rotore di un campo vettoriale
è un campo vettoriale solenoidale

* Integrale di Superficie

Possiamo estendere il concetto di integrale curvilineo di un campo vettoriale a 2 dimensioni. Orro
vogliamo capire l'effetto di un campo vettoriale su
una superficie. Quest'ultimo dipenderà, oltre che
dal campo, dalla dimensione della superficie e dal
suo orientamento.

↳ Per farlo associamo un vettore ad una
superficie:



$\vec{\Sigma}$: • direzione $\perp$ alla sup. ce
• $|\vec{\Sigma}| = \text{Area superficie}$

• Verso definito dal verso di percorrenza del bordo
usando regola mano dx

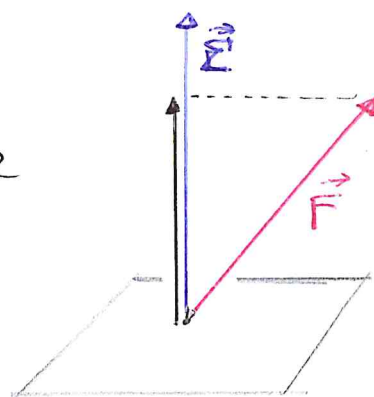
Questo è scelto in
modo arbitrario

→ Posso quindi calcolare il prodotto scalare:

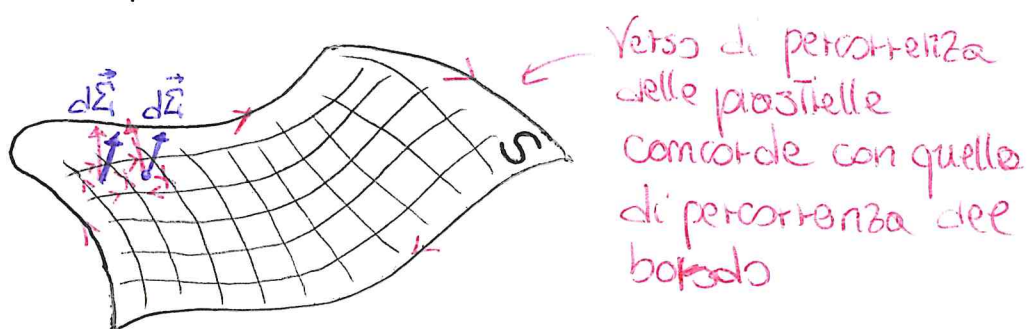
$\vec{F} \cdot \vec{\Sigma} \equiv \text{Flusso del campo}$
attraverso la superficie

↙
 > 0 se
 $\vec{F}$ concorde $\vec{\Sigma}$
(uscite)

↘
 < 0
 $\vec{F}$ discorde $\vec{\Sigma}$
(entrante)



→ Per una superficie irregolare posso immaginare di tassellare la superficie, ed assegnare un vettore ad ogni piastrina

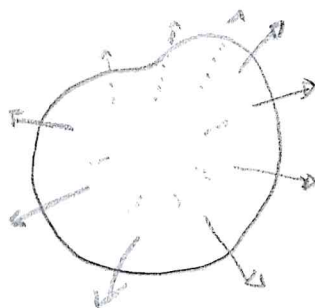


Posso calcolare l'effetto globale sulla sup. ce come:

$$\sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{\Sigma} \Rightarrow \int_S \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} \equiv \text{Integrale di sup. ce}$$

passando
a piastrine
infinitesime

→ Se consideriamo una sup. ce chiusa - e.g. una sfera - non ho un verso di percorrenza del bordo, e per convenzione il verso del vettore associato è uscente:



In questo caso

$$\Phi_{\vec{F}} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} \equiv \text{Flusso di } \vec{F} \text{ attraverso la sup. ce chiusa } S$$

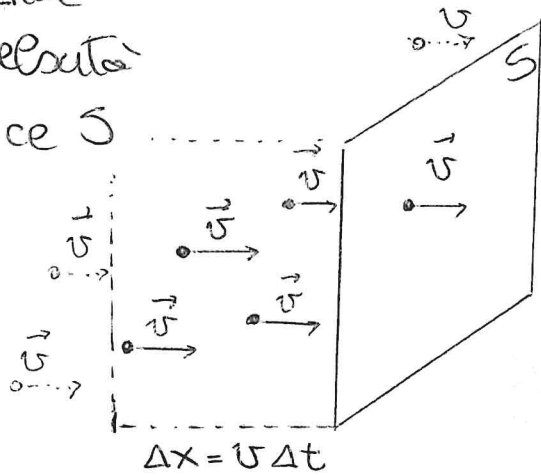
* porta del flusso di p. lle

$$\begin{aligned} \oint_S > 0 & \text{ Flusso Uscente} \\ \oint_S = 0 & \text{ Flusso nullo} \\ \oint_S < 0 & \text{ Flusso Entrante} \end{aligned}$$

Flusso di Particelle:

Consideriamo delle
particelle con velocità

$\vec{v}$ $\perp$ alla sup. ce S



→ Le particelle che in Δt passano attraverso la superficie S , sono le quelle che si trovano ad una distanza da S minore di $\Delta x = v \Delta t$, e che intersecano S .

Ovvero tutte le pille dentro il volume $V_{S, \Delta t} = S \Delta x = S v \Delta t$ attraversano la superficie S in Δt .

→ Assumiamo che le pille abbiano densità volumetrica costante: $m = \frac{N}{V} = \text{cost} [L^{-3}]$
→ # pille nel volume generico V

→ Quindi il # di particelle che attraversa S in Δt :

$$N_{\text{tot}}(\Delta t) = m V_{S, \Delta t} = m S v \Delta t$$

→ Mentre nell'unità di Tempo

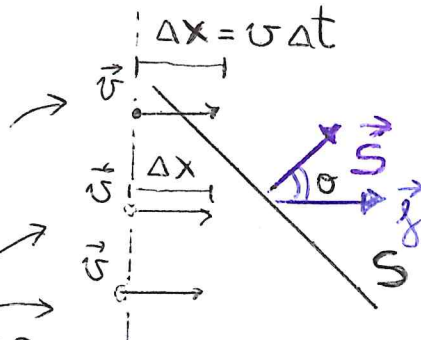
$$\frac{N_{\text{tot}}(\Delta t)}{\Delta t} = m S v = S j \quad \text{con } j \equiv m v [L^2 s^{-1}]$$

↑
Densità di Corrente

→ Supponiamo ora che la $\vec{v}_i = \vec{v}$ non sia $\perp$ alla superficie.

Questa pila attraversa S in Δt

Queste pile non attraversano S in Δt



⇒ le pile che attraversano S in Δt sono quelle contenute nel volume

$$V = \underbrace{v \Delta t}_{h} \underbrace{S \cos \theta}_{\text{base}}$$

⇒ Invece il # di pile che attraversa S in Δt dipende dall'inclinazione della superficie rispetto alla velocità

Per generalizzare la mia formula definisco il vettore superficie $\vec{S}$, con modulo l'area, direzione $\perp$ alla superficie (e verso scelto in modo arbitrario).

Inoltre $\vec{j} = n \vec{v}$ è un vettore.

$$\Rightarrow \frac{N_{\text{tot}}(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{j} \cdot \vec{S} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \text{N.B. se } \vec{j} \parallel \text{ alla superficie, ovvero } \\ \vec{j} \perp \vec{S}, \text{ il prodotto scalare è } \\ \text{ nullo} \end{array}$$

$$= j S \cos \theta$$

Questa quantità corrisponde al flusso di particelle attraverso la superficie; ovvero il numero di particelle che attraversa S nell'unità di tempo.

Corrente Elettrica

Consideriamo un flusso di particelle ^{cariche q} con velocità $\vec{v}$.

→ La carica che attraversa la superficie generica S in Δt sarà:

$$\Delta Q = q \cdot N_{\text{tot}} = q \cdot n \cdot V_{S, \Delta t} = q \cdot n (\vec{S} \cdot \vec{v}) \Delta t$$

→ Nell'unità di Tempo:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = q n \vec{v} \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{S} \quad \text{con} \quad \vec{j} = q n \vec{v} \quad \begin{array}{l} \text{Densità di} \\ \text{corrente elettrica} \end{array}$$

↓
flusso di cariche
attraverso $\vec{S}$

⇒ La quantità $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ è detta intensità di corrente elettrica

(che attraversa S). Più precisamente:

$$i \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

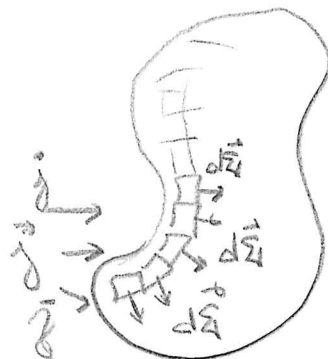
Intensità corrente
Elettrica

u.d.m. $[A]$
↓
Ampere
=
 $\left[\frac{C}{s} \right]$

⇒ Se consideriamo una superficie S irregolare, posso immaginare di tassellare per calcolarne i :

$$i = \sum_i \vec{j}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \equiv \text{flusso del vettore densità di corrente attraverso } S$$

↓
orientato al
limite di
 ΔS infinitamente
piccolo



fai caso Schiava
ma Abelli

≠ Velocità di deriva

⇒ Il moto degli e^- in un conduttore in equilibrio elettrostatico è randomico, e la velocità media in ogni volume infinitesimo è nulla:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i = 0$$

⇒ Possiamo calcolare la velocità quadratica media degli e^- nell'ipotesi che questi si comportino come un gas ideale. Sotto quest'ipotesi:

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m_e \overline{v^2} \Rightarrow \overline{v} = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} \sim 10^5 \text{ m/s}$$

$\downarrow$ $1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ $\downarrow$

$$= 0.61 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$\downarrow$

Assumendo $T = 293 \text{ K}$

In realtà usando
Meccanica Quantistica
della $v \sim 10^6 \text{ m/s}$

p.e.g. filo $\phi 1 \text{ mm}$

⇒ Colleghiamo ora il conduttore ad una batteria di modo che scorra una corrente di 1 A . Gli e^- inizieranno a muoversi in modo coerente (ovvero $\vec{v}_m \neq 0$) con una velocità $\vec{v}_d$ detta velocità di deriva:

$$i = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = j \pi r^2 = n q v_d \pi r^2 \Rightarrow v_d = \frac{i}{n q \pi r^2} \approx 0.02 \text{ mm/s}$$

$\downarrow$ $m_{cu} q_e$

$$n_{cu} = \frac{\# e^- \text{ per atomo}}{\text{Volume}} \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$\downarrow$ come

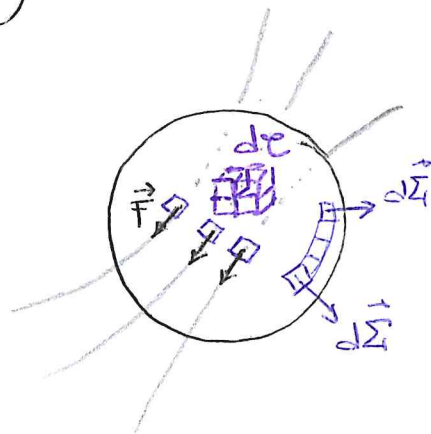
→ La velocità di deriva è molto minore della velocità termica, tuttavia è un moto collettivo ordinato che rende $U_m \neq 0$, ed il # di e^- per u.d. volume è molto grande, e quindi da luogo ad effetti osservabili.

Teorema della divergenza (di Gauss)

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\epsilon$$

$\int_S$ $\swarrow$ Integrale doppio $\int_{V_S}$ $\searrow$ Integrale Triplo

elemento di volume $d\epsilon$



Flusso di $\vec{F}$ attraverso la sup. ce chiusa S è uguale alla divergenza di $\vec{F}$ sul volume V_S racchiuso da S .

→ Immaginando di considerare un volumetto sferico infinitesimo:

$$\vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = d\Phi_F = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\epsilon \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{\Sigma}}{d\epsilon} \quad \begin{matrix} [\text{Flusso}] \\ [\text{Volume}] \end{matrix}$$

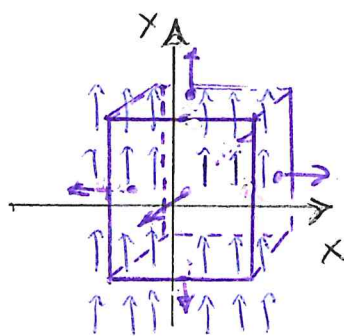
dunque Flusso = divergenza

• Es

$$\vec{F} = K \hat{y}$$

Averemo visto

che $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ quindi



il flusso, attraverso qualsiasi sup. ce chiusa, sarà sempre nullo. (Tanto flusso "entra" nella sup. ce, Tanto ne esce) → Nell'esempio il flusso è $\neq$ solo attraverso le facce // al piano xz (ovvero $\perp$ al verso di $\vec{F}$); ma il flusso che attraversa la sup. ce inferiore è l'opposto a quello attraverso la sup. superiore

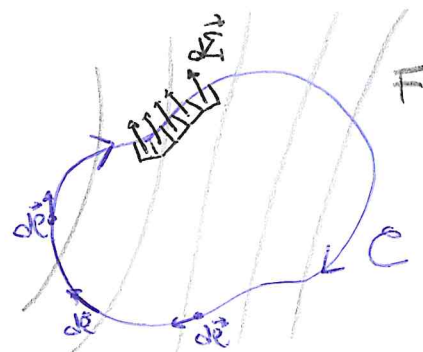
→ In regime stazionario, Tanto carica entra, Tanto ne esce, ovvero $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$; quindi:

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

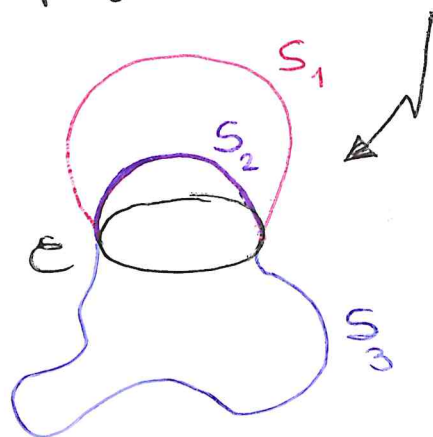
→ Flusso nullo o divergenza nulla indicano un regime stazionario

• Teorema del Rotore (di Stokes)

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{e} = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\Sigma}$$



Circolazione del campo $\vec{F}$ lungo la curva chiusa C è uguale al flusso del rotore del campo sulla superficie S "orlata" (che si poggia) su C



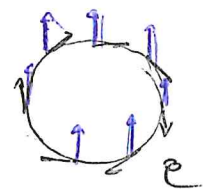
N.B.

Qualsiasi sup. ce
"orlata" da C

⇒ Quindi se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{e} \neq 0$ c'è una componente rotatoria
metta del campo sul percorso scelto.

⇒ Dato un percorso chiuso intorno ad un punto la
circolazione corrisponde a:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{e} = \langle \vec{F}_{\text{tg}} \rangle \cdot \text{lunghezza di } C$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{\text{Circolazione}}{\text{Superficie}}$$

Se > 0 vuol dire
che in media la
direzione di $\vec{F}$ è concorde
al circuito

* Teorema di Helmholtz

Qualunque campo vettoriale può essere completamente definito dalla sua divergenza e dal suo rotore, e può essere decomposto nella somma di un campo conservativo ($\vec{F}_{\text{con}} = \vec{\nabla} \phi$) ed uno solenoideale ($\vec{F}_{\text{sol}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$):

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{con}} + \vec{F}_{\text{sol}} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$



Vedremo ad es. che per descrivere il campo elettrico e magnetico abbiamo bisogno di 2 eq. in $\forall$ campo, ovvero la divergenza ed il rotore da 2 campi.

↓
Eq. di Maxwell