

* CAMPO Elettico:

Un corpo carico genera un campo di forze nello spazio circostante. Un ^{altro} corpo carico ^(detto carica di prova) che entra nel ^{del primo campo} campo di forze ^è è soggetto ad una forza elettrica.

Ad ogni punto dello spazio possiamo associare un vettore:

campo vettoriale

Compo Elettostatico generato da una o più cariche ferme

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}_0(x, y, z)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2(x, y, z)} \hat{r}$$

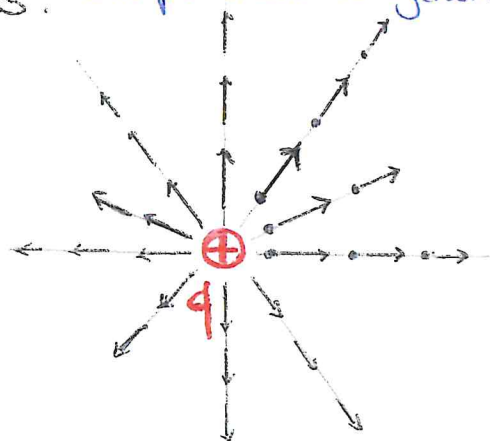
e.g. per carica puntiforme

Carica sorgente del campo

Distanza dalla carica sorgente

dato dal rapporto della forza elettrica risultante $\vec{F}_0(x, y, z)$ che agisce su una carica di prova positiva q_0 , posta nel punto (x, y, z) . → Come per la forza vale il principio di sovrapposizione: $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$

E_s : Campo Elettrico generato da una carica puntiforme positiva



→ Il campo elettrico permea tutto lo spazio, e decade con il quadrato della distanza dalla carica sorgente

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

* Unità di misura:

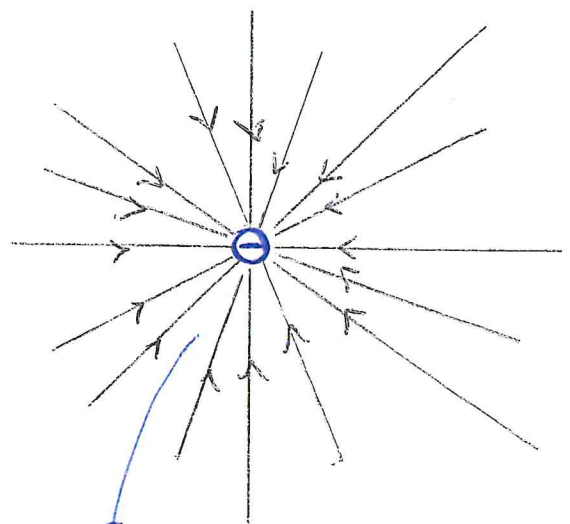
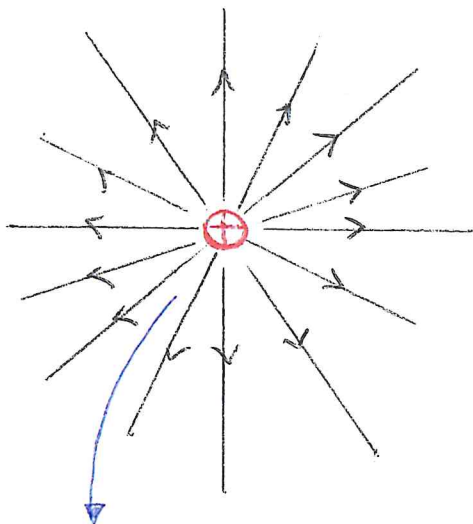
$[F] \leftarrow N$ → Vedremo dopo che operativamente è l'unità di misura utilizzata e'

$C \rightarrow [q]$ un'altra

→ Linee di forza del campo elettrostatico:

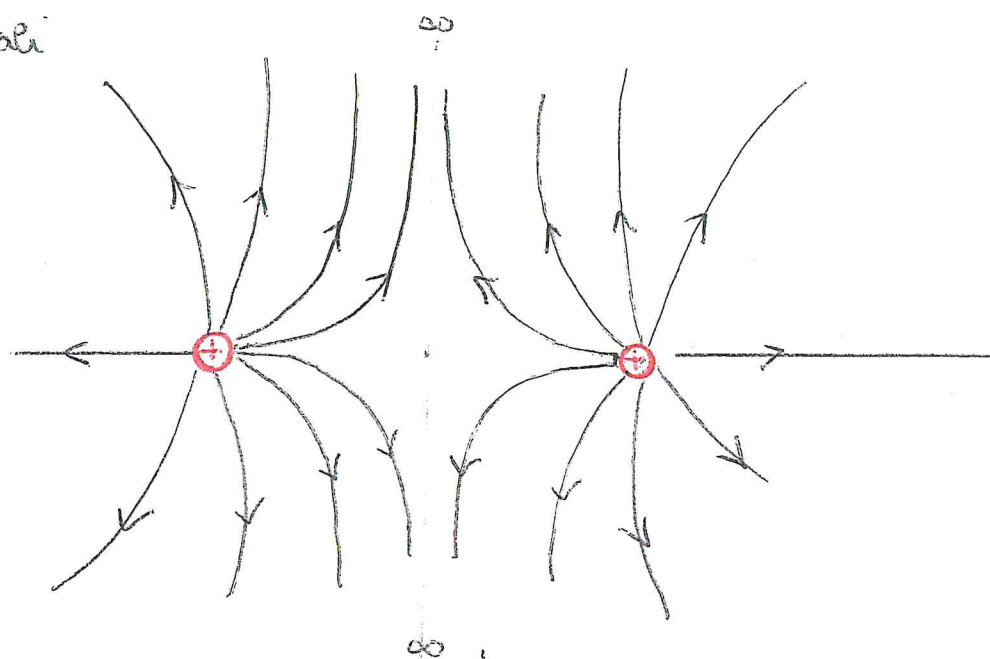
In ogni punto dello spazio possiamo disegnare una linea tangente (e concorde) al campo elettrico generato da un corpo carico, o da un sistema di cariche.

- Le linee di forza vanno verso l'esterno se la carica è positiva, e verso l'interno se negativa
- Le linee di forza sono più fitte dove il campo elettrico è più intenso
- Le linee di forza non si incrociano MAI (in ogni punto il campo è definito in modo univoco, e non può avere 2 direzioni)



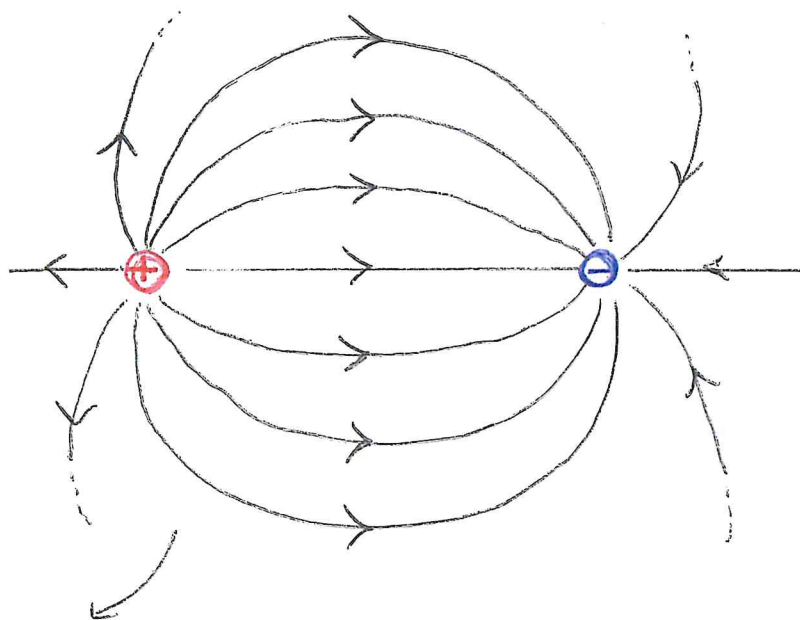
Più ci avviciniamo alla carica sorgente, più il campo elettrico è intenso, più sono fitte le linee di forza.

Es: Cariche uguali
dello stesso
segno



Per 2 cariche dello stesso
segno le linee di forza
si "dividono" all'infinito

Es: Cariche uguali
di segno opposto
(Dipolo Elettrico)



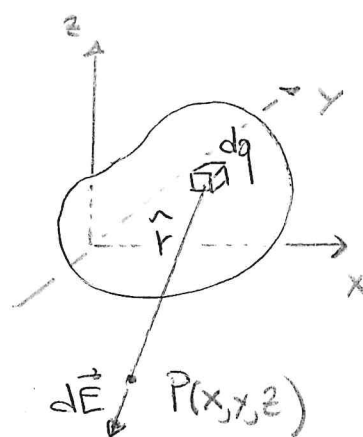
Le linee di forza partono dalla carica positiva e
si chiudono su quella negativa

→ Fissato un sistema di cariche possiamo associare ad ogni pto dello spazio un vettore $\vec{E}(x,y,z)$ (indipendente dalla presenza o meno della carica di prova); avuto il sistema di cariche e' la sorgente del campo elettrostatico $\vec{E}$.

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \hat{r}_i$$

per una distribuzione continua di cariche, avro' che ogni elemento di volume ^{dve} genera un campo:

$$d\vec{E}(x,y,z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$



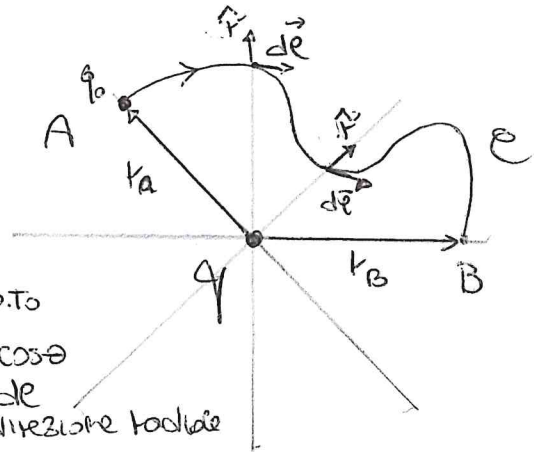
Quindi il campo Totale risultante e':

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho^{(x,y,z)} d\tau}{r^2} \hat{r}(x,y,z)$$

⇒ Calcoliamo l'integrale curvilineo della forza elettrostatica lungo la curva generica C nel caso di un campo generato da una carica p.tiforme:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{e} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} =$$

N.B. corrisponde al lavoro compiuto dalla forza per spostare una carica q_0 all'interno del campo E



Vettore del campo $\vec{E}$ in un p.to
 $d\vec{r} = \vec{r} \cdot d\vec{e} = dr \cos \theta$
 ↳ proiezione di $d\vec{e}$ lungo la direzione radiale

$$= \int_A^B \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{e}}{r^2} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Solo gli spostamenti radiali mi contribuiscono all'integrale

(e quindi il campo $\vec{E}$)

L'integrale Non dipende dal percorso, ma solo dalle posizioni A & B!

La Forza Elettrostatica $\vec{F}$ è conservativa!

(come ci si poteva aspettare da una forza centrale)

↳ Quindi può essere espresso come:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -(\partial_x V; \partial_y V; \partial_z V) \quad \text{con } V \text{ detto potenziale elettrostatico del campo } E$$

per convenzione

ovvero; non dipendendo dal percorso:

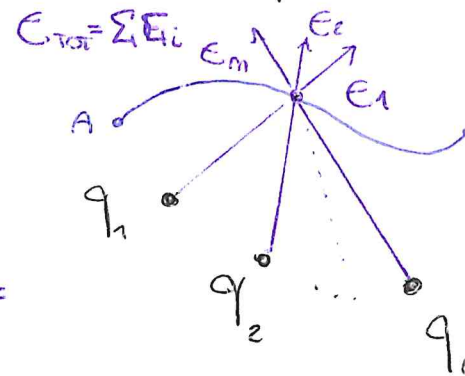
$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} = V(A) - V(B) \Rightarrow W = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} = q_0 \Delta V = -\Delta U$$

l'integrale sarà una funzione delle sole posizioni

Variazione energia potenziale

⇒ Il ragionamento può essere esteso ad un numero qualsiasi di cariche usando il principio di sovrapposizione

$$\vec{E}_{\text{tot}}(x,y,z) = \sum_i^m \vec{E}_i(x,y,z)$$



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{e} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} = q_0 \int_A^B (\sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{e} =$$

$$= q_0 \sum_i \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{e} = q_0 \sum_i \int_{r_{A,i}}^{r_{B,i}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = q_0 \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 k_i} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 k_f} \right)$$

$$= q_0 (V_A - V_B) = -\Delta U$$

↳ Ognuno di questi integrali Non dipende dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale

→ In generale qualsiasi campo $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ radiale con modulo dipendente solo dalla distanza è conservativo.

⇒ Unità di misura del potenziale: Volt $\equiv V = \frac{J}{C}$

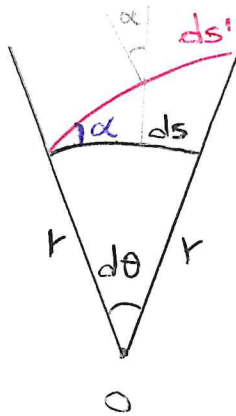
⇒ Questo ci permette di esprimere il campo $\vec{E}$ come

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{Nm}{Cm} = \frac{J}{Cm} = \frac{V}{m}$$

Nota: Angolo Solido

$\Rightarrow$ In 2D abbiamo che l'angolo sotteso da una curva e' dato da:

$$d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{ds' \cos \alpha}{r} \quad [\text{rad}]$$



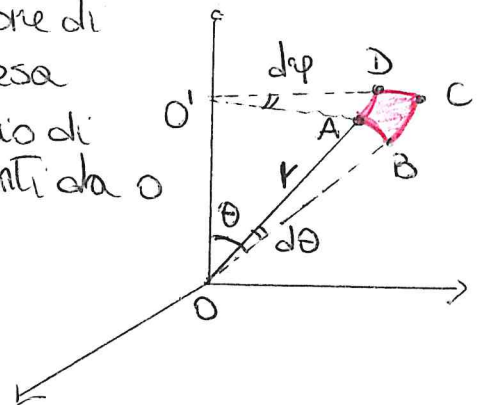
$d\theta \Rightarrow$ da' una misura della parte di piano compresa tra due semirette uscenti da O

$\Rightarrow$ Possiamo estendere a 3D, e definire l'angolo solido

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2}$$

Sup. ce sottesa

Misura porzione di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti da O



Un elemento di superficie di una calotta sferica, in coordinate sferiche corrisponde a:

$$d\Sigma_0 = \overline{AB} \cdot \overline{CD} = r d\theta \cdot \overbrace{r \sin \theta d\varphi}^{O'A} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$\Rightarrow$ Per una superficie chiusa contenente l'origine, l'angolo solido sarà quindi:

$$\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi (1 + 1) = 4\pi$$

* Legge di Gauss

⇒ Calcoliamo il flusso del campo $\vec{E}$ generato da una carica puntiforme.

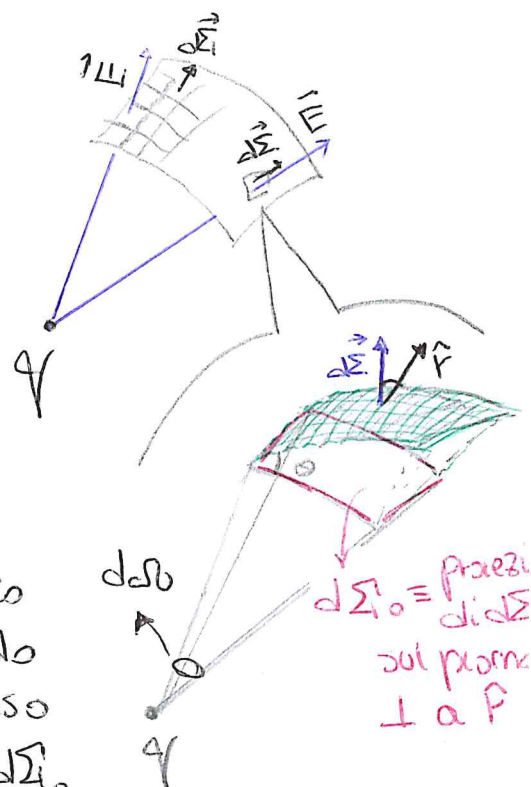
Per ogni elemento di superficie

$$d\phi(E) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\Sigma}}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma \cos\theta}{r^2} = \frac{q d\Sigma_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

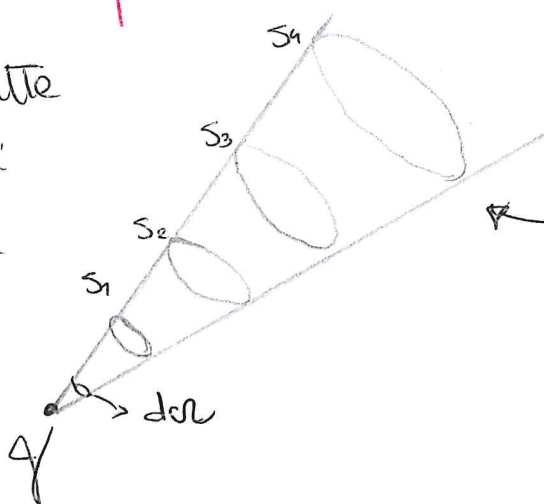
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad \text{con} \quad d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} \quad \begin{array}{l} \text{angolo} \\ \text{solido} \\ \text{sotteso} \\ \text{da } d\Sigma_0 \end{array}$$

(vedi nota)



Il flusso del campo generato da una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido sotteso, non dalla superficie o dalla distanza

$S_1, S_2, \dots$, sottendono tutte lo stesso angolo, quindi il flusso attraverso le superfici è lo stesso



$$\phi(E)_{S_1} = \phi(E)_{S_2} = \dots$$

N.B. Questa proprietà è valida perché $E(r) \propto \frac{1}{r^2}$

⇒ Per una superficie finita esterno:

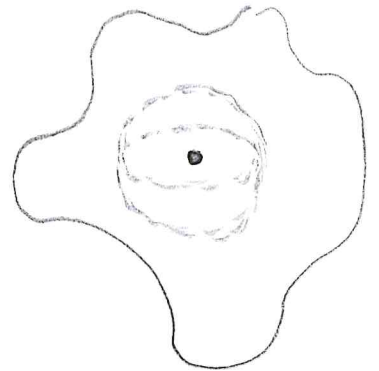
$$\phi(E) = \sum_i d\phi_{E_i} \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Angolo solido
sotto dalla
superficie S
rispetto alla
carica q

⇒ Consideriamo ora una sup. ce chiusa che
racchiuda la carica q.

$$\phi(E) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

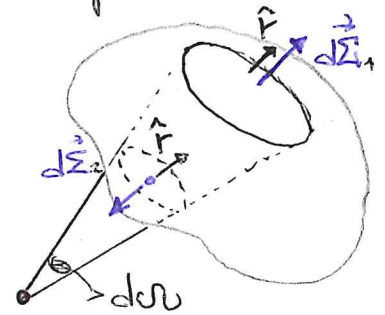
Angolo solido
sotto sarà quello
di una sfera!



⇒ Se invece consideriamo una ~~carica~~ sup. ce chiusa
esterna alla carica esterno

$$\phi(E) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \Rightarrow \text{Infatti } \forall \text{ } d\Omega \text{ } \text{infinitesimo dove} \\ \text{il flusso attraverso}$$

le due superfici dΣ che interseca è
uguale ed opposto



⇒ Possiamo scrivere in generale:

$$\Phi_S(E) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Superficie
Chiusa

Carica
interna
↑ a S

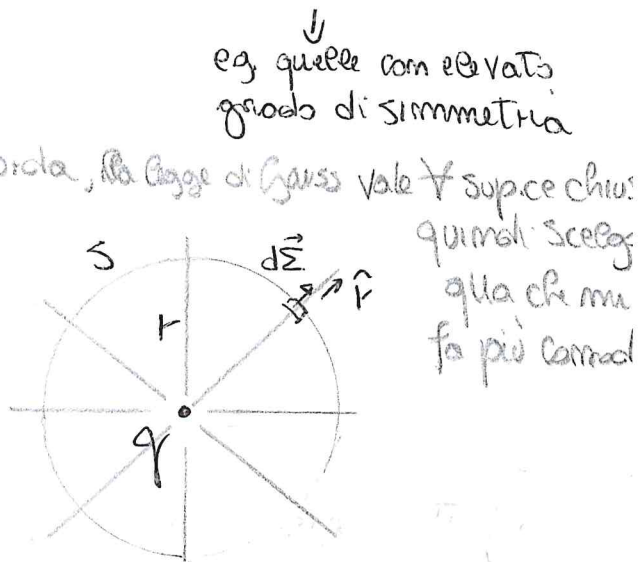
legge di
Gauss

⇒ Applicazioni legge di Gauss:

↳ Ci permette di trovare il campo $\vec{E}$ per alcune distribuzioni di carica

a) Carica puntiforme statica:

⇒ Partiamo dall'assunzione che $\vec{E} = E(r) \hat{r}$, e consideriamo una sfera concentrica a q .



⇒ Applichiamo Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = E \cdot r^2 \int d\theta \sin\theta d\varphi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

per assunzione

legge di Gauss

$\vec{E} \parallel d\vec{\Sigma}$ & $E \equiv E(r)$ costante sulle sup. di una sfera

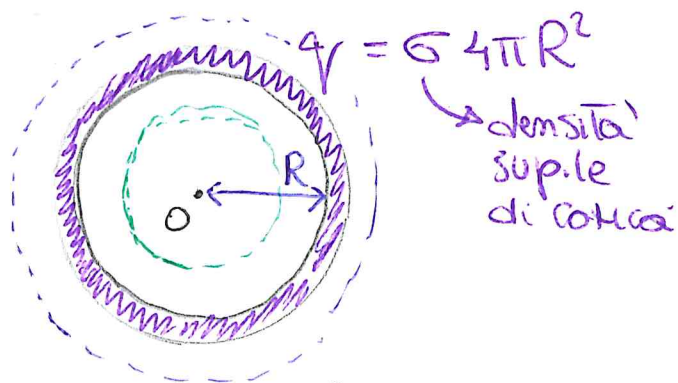
$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot q$$

b) Superficie sferica cava carica * Spessore Guscio infinitesimo

All'interno della superficie ($r < R$):

$$\oint_{S_{r < R}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = 0$$

Non c'è carica all'interno della sfera



All'esterno della superficie ($R > r$):

$$\oint_{S_{R > r}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Uguale al campo generato da una carica puntiforme!

