

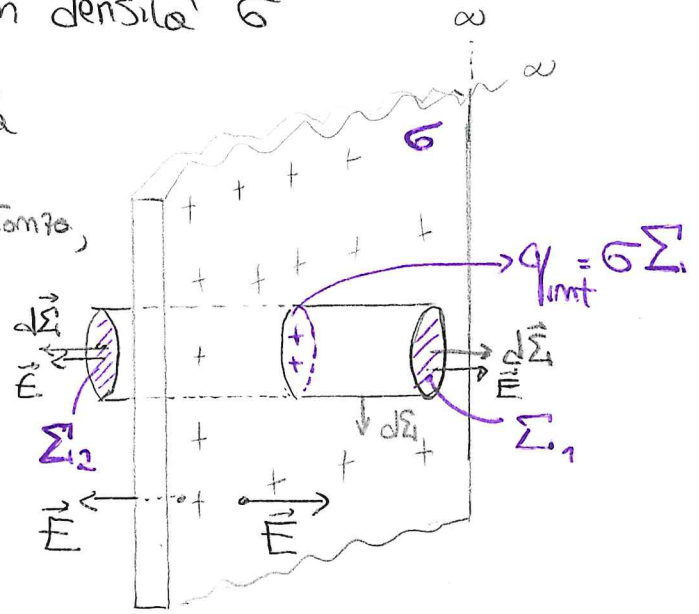
c) Superficie infinita di carica con densità σ

$\Rightarrow$ Per considerazioni di simmetria

il campo è ortogonale alla
 lastra, ^{il modulo potrebbe dipendere dalla distanza,} e ha verso

opposto sulle 2 facce

(uscendo per carica +,
 entrando per carica -).



$\rightarrow$ Come sup. ce per applicare la

legge di Gauss considero un cilindro V con

le basi parallele alla lastra

che interseca la lastra

uguale sulle basi

potrebbe essere funzione

q_{int}

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 2 \int_{\Sigma} E d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel d\vec{\Sigma}$ sulle basi
 $\vec{E} \perp d\vec{\Sigma}$ sul bordo

$$2 E \Sigma = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

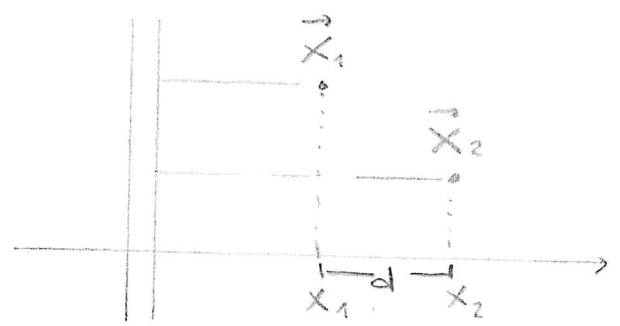
il campo ha
 modulo
 costante su
 tutto lo spazio

Discontinuo
 tra una faccia e l'altra $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$

$\Rightarrow$ La d.d.p. tra due punti $\vec{x}_1$ & $\vec{x}_2$

$$V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

dipende solo da x ;
 le sup. ci equipotenziali
 sono piani // alla lastra



d) → Consideriamo ora 2 piani infiniti paralleli uniformemente carichi con densità di carica superficiale $+\sigma$ e $-\sigma$

In modulo:

$$E_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_{+\sigma} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{\text{Tot}} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma}$$

• Al di fuori delle lastre:

$$E_{+\sigma} = -E_{-\sigma} \Rightarrow E_{\text{Tot}} = 0$$

• Tra le due lastre

$$E_{+\sigma} = E_{-\sigma} \Rightarrow E_{\text{Tot}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \text{discontinuità tra i due lati delle lastre } \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

⇒ d.d.p. Tra le due lastre:

$$0 < x < d$$

$$V(0) - V(x) = \int_0^x E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x \Rightarrow V(x) = V(0) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} x$$

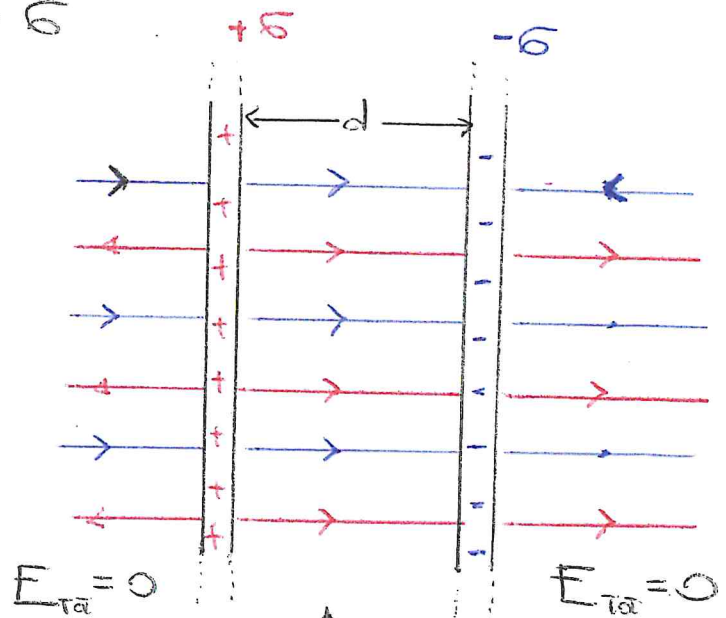
• Tra le due facce ($x=d$)

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

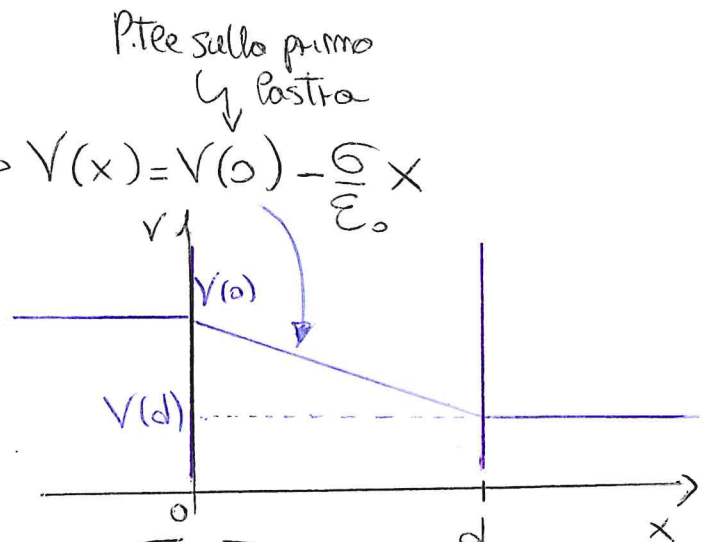
• All'esterno $\vec{E} = 0$ quindi rimane costante

$$x < 0 \rightarrow V(x) = V(0)$$

$$x > d \rightarrow V(x) = V(d)$$

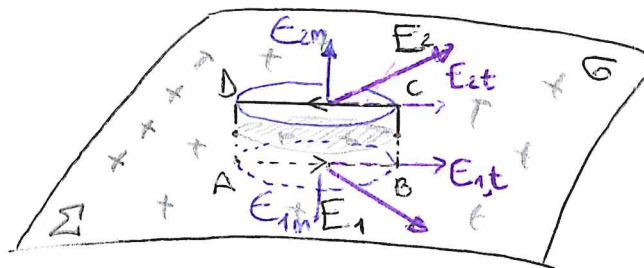


Tra le due lastre i campi sono concordi ed uguali in modulo



e) Campo elettrostatico nell'intorno di una strato superficiale di carica.

- Calcoliamo la circolazione sulla curva infinitesima ABCDA, con $AB = d\vec{S}_1$ e $CD = d\vec{S}_2$ // alla superficie ed uguali in modulo; i lati



AD e BC, $\perp$ alla sup. ce sono infinitesimi di ordine superiore e possono essere trascurati:

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E_{1,t} dS_1 - E_{2,t} dS_2 = 0$$

Assumendo sono costanti $E_{1,t}$ e $E_{2,t}$

ovvero $E_{1,t} = E_{2,t}$ ★

Componenti del campo tangenti alla sup. ce

Legge Faraday-1 in regime statico (E_{statico} è conservativo)

La componente tangenziale del campo è continua attraversando la distribuzione superficiale di carica.

- Calcoliamo il flusso attraverso un cilindro di basi $d\vec{\Sigma}_1, d\vec{\Sigma}_2$ parallele alla sup. cie, che interseca la sup. cie, e la cui altezza è un infinitesimo di ordine superiore a $d\vec{\Sigma}$:

$$\phi(\epsilon) = \oint_G \vec{E}_i \cdot d\vec{\Sigma}_i = \vec{E}_1 \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{\Sigma}_2 = (E_{1,n} - E_{2,n}) d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma d\vec{\Sigma}}{\epsilon_0}$$

Assumendo sono costanti $E_{1,n}$ e $E_{2,n}$ Componenti normali alla sup. ce

ovvero $E_{2,n} - E_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ★★

e.g. si trova facilmente nel caso della lastica piana infinita a lo sfoca con

⇒ ★ & ★★
in forma vettoriale

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$$

↳ Versate 1 alla supero con verso da E_1 a E_2

Vale esattamente V.p.to della sup. cie. I campi E_1 e E_2 sono dovuti sia alla carica in sup. che campi esterni

Conduttori in equilibrio elettrostatico

Nei conduttori (solidi) $\forall$ atomo ci sono 1 o più e^- liberi di muoversi che passano dal luogo ad una corrente se presente un opportuno $\vec{E}$.

Nel caso statico le cariche sono fisse, e questo implica che all'interno del conduttore (in equilibrio) il campo sia nullo: $\vec{E}_{int} = 0$



Questa va intesa come condizione media macroscopica.

$\vec{E}_{int} = 0$ ha come conseguenza che:

a) $\rightarrow$ Carica interna $q_{int} = 0$; infatti presa una qualsiasi sup. chiosa all'interno del conduttore il flusso sarà nullo, e quindi, secondo la legge di Gauss, la carica al suo interno sarà nulla.

b) Il potenziale all'interno del conduttore è costante; infatti presi 2 pti all'interno del conduttore:

$\hookrightarrow$ o sullo sup. cie

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2)$$

c) Dato che la sup. cie è equipotenziale, e $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, il campo $\vec{E}$ sarà ortogonale alla superficie nelle sue vicinanze e vale:

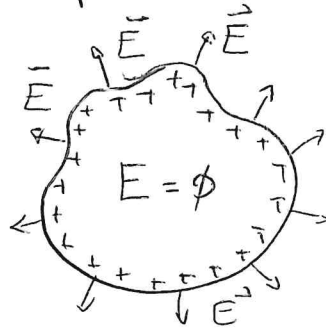
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\Sigma}_i$$

$\downarrow$
Vettore elemento di superficie

Teorema di Coulomb

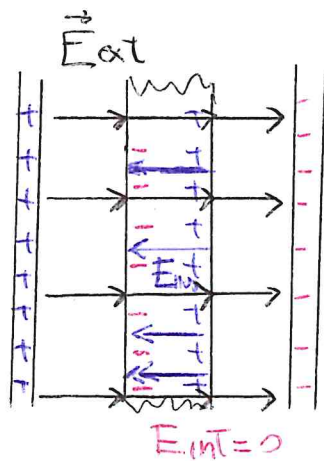
$\downarrow$ Si ricava dalla discontinuità del campo vicino ad una superficie carica $\vec{E}_{ext}$

→ Un conduttore carico contiene da altri conduttori, la carica si distribuirà sulla sup. cie del conduttore di modo che il campo interno sia nullo.



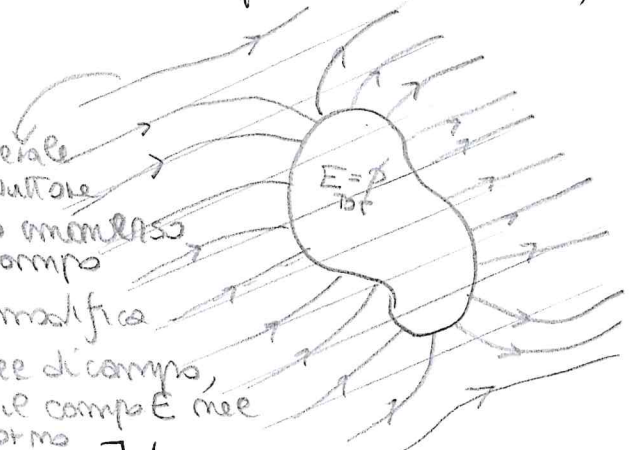
→ Analogamente, se si immerge un conduttore in un campo $\vec{E}$ statico esterno, le cariche si dispongono ^{sulla superficie} in modo da generare un campo elettrico indotto, che sommato a quello esterno, dà $E_{int} = E_{ext} + E_{ind} = 0$

e.g.



In generale
un conduttore
neutro immerso
in un campo
 $\vec{E}_{ext}$
ne modifica
le linee di campo,
ovvero il campo $\vec{E}$ nel
suo interno

Nota: $\exists$! distribuzione
di cariche all'equilibrio
che soddisfa la condizione $E_{int} = 0$



→ Se invece mettiamo 2 conduttori, la carica si distribuisce, ed abbiamo un unico conduttore in equilibrio per cui vale $E_{int} = 0$ e $V_{int} = \text{cost}$

⇒ Effetto punta

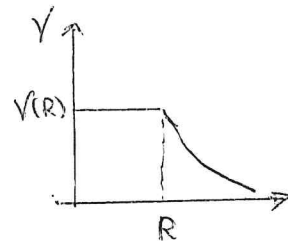
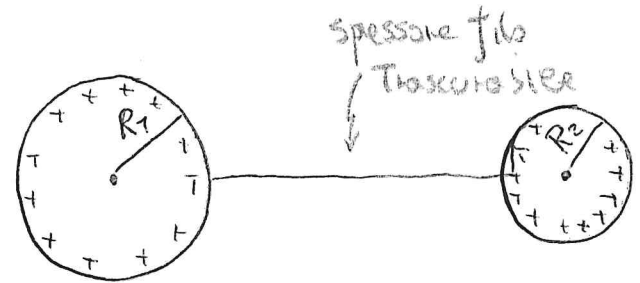
Consideriamo 2 sfere conduttrici S_1 e S_2 , di raggio R_1 e R_2 , unite da un filo conduttore, con carica Totale $q = q_1 + q_2$ e densità di carica ^{uniforme} $\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$ e $\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$. (Le sfere sono abbastanza lontane che Σ_1 possiamo trascurare effetti d'induzione).

⇒ Abbiamo visto che per una ^{distribuzione superficiale} sferica di carica il campo vale:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

il potenziale vale: ($r > R$)

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E(r') dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



e per $r \leq R$, $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

⇒ Abbiamo visto che, due conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale quindi, sulla superficie:

$$V(R_1) = V(R_2) \Rightarrow \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

ovvero $\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow$ la carica si ripartisce in modo prop. ai raggi

- Il rapporto delle densità di carica vale

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1 / 4\pi\epsilon_0 R_1^2}{q_2 / 4\pi\epsilon_0 R_2^2} = \frac{q_1}{q_2} \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \text{la densità di carica è inversamente prop. al raggio}$$

→ Possiamo anche calcolare il rapporto dei campi E sulla superficie

$$E(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{R^2} \rightarrow \frac{E_1(R)}{E_2(R)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

⇒ La densità di carica ed il campo superficiale sono maggiori dove il raggio di curvatura è minore (ovvero maggiore è la curvatura delle sup. ci)



Questo è un caso particolare del cosiddetto "effetto punta", o "effetto dispersivo delle punte": le cariche su un conduttore carico tendono a concentrarsi sulle estremità appuntite (piccolo raggio di curvatura), creando dei campi elettrici molto intensi in loro prossimità. Il fenomeno è il principio alla base dei parafulmini.

⇒ Conduttore cavo (schermo elettrostatico)

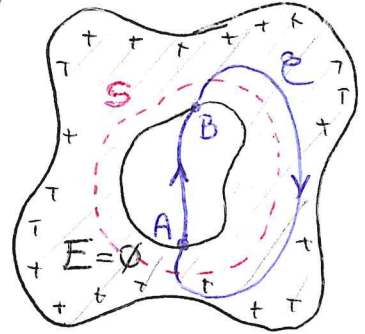
→ Consideriamo un conduttore
cavo carico. ⇒ Domanda come si dispongono le cariche?

Il flusso attraverso una superficie
chiusa S che racchiuda la cavità

sarà:

camp. e' nullo nel conduttore
e quindi sulla superficie S

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_S \cancel{\phi} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$



⇒ $q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow$ la carica interna ad S , e quindi

sulle pareti della cavità è nulla!

⇓

Resta la possibilità che sulle pareti della cavità
ci sia una separazione di carica q_+ e q_- che genera un camp.
Calcoliamo la circolazione lungo C :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_A^B \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{e} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$$

↳ Perché il campo $\vec{E}$ è conservativo
o perché il campo è nullo

elettrostatico

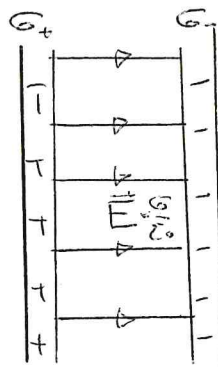
⇒ $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ Anche il campo all'interno della cavità
è nullo

⇒ la carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce
sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche
se cavo. Il campo elettrico è nullo ed il potenziale
costante $\forall$ p.to interno rispetto alla sup. ce esterna
del conduttore ⇒ Giobia di Faraday

Condensatori e Capacità

⇒ Avremo visto che all'interno di 2 lastre piane indefinite il campo costante vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



mentre la differenza di potenziale tra le lastre:

$$\Delta V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} \frac{d}{\Sigma}$$

Carica su una piastra Superficie Piastra

⇒ Fissate le caratteristiche delle mie piastre (d, Σ) il rapporto $\frac{Q}{\Delta V}$ = costante, a cui si dà il nome di CAPACITÀ; U.d.m. Farad $F = \frac{C}{V}$

⇒ Per un ^{*}condensatore piano vale:

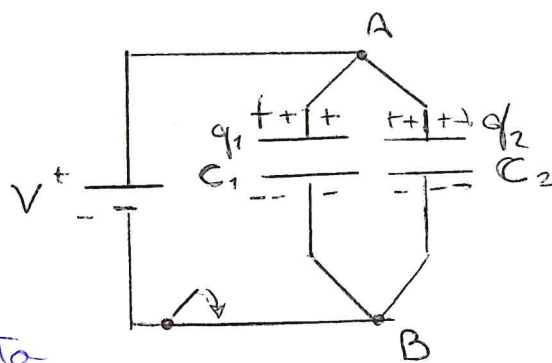
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d} \rightarrow \text{dipende solo dalle proprietà macroscopiche del sistema (edac mezzo che lo circonda)}$$

* Un condensatore è un sistema generico di 2 conduttori tra i quali c'è isolazione completa ⇒ avere tutte le linee di campo che partono da uno finiscono sull'altro. I 2 conduttori prendono il nome di armature

Collegamento di Condensatori:

⇒ Condensatori in Parallelo:

La d.d.p. fra capi dei condensatori è la stessa: $V = V_A - V_B$



$$\frac{q_1}{V} = C_1 \quad \& \quad \frac{q_2}{V} = C_2$$

d.d.p. formata dal generatore

Chiamata $q = q_1 + q_2$ la carica totale sul conduttore superiore avremo:

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V = C_{eq} V$$

Ovvero, i due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore di capacità equivalente.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_m$$

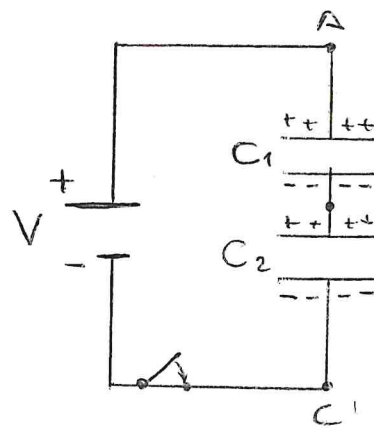
Stessa cosa valida per m -condensatori in parallelo

La C_{eq} è quindi sempre maggiore delle capacità individuali se posti in parallelo

⇒ Condensatori in Serie

→ Una volta chiuso il circuito le armature si caricano con la stessa carica q

$$V_B - V_C = \frac{q}{C_2} \quad \& \quad V_A - V_B = \frac{q}{C_1}$$



Questo centrale è un conduttore neutro, su cui compare la carica q per induzione

Somma delle cadute di potenziale $(V_A - V_B) + (V_B - V_C)$

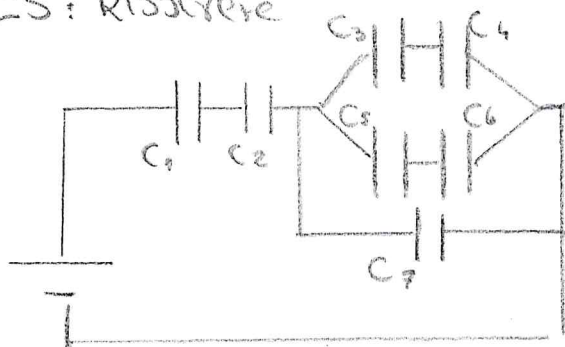
$$V = V_A - V_C = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Quero, dati n -condensatori in serie, questi possono essere descritti come un unico condensatore con capacità equivalente:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)^{-1}$$

↳ della capacità dei singoli condensatori

Es: Risolvere



②

$$C_{eq}^{34567} = C_{eq}^{34} + C_{eq}^{56} + C_7$$

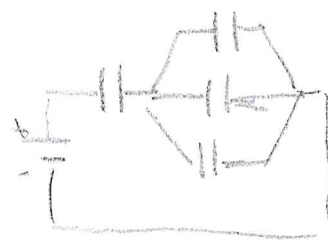


①

$$C_{eq}^{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

$$C_{eq}^{34} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right)^{-1}$$

$$C_{eq}^{56} = \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} \right)^{-1}$$

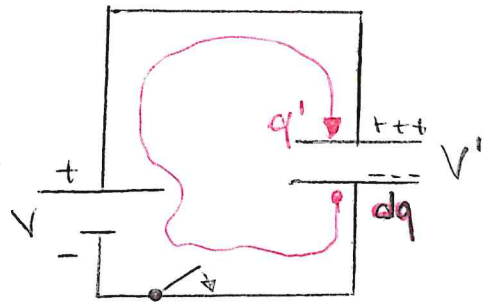


③

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{eq}^{12}} + \frac{1}{C_{eq}^{34567}} \right)^{-1}$$

Energia del Campo Elettrostatico

→ il processo di carica di un condensatore consiste in definitiva in una separazione di cariche, che richiede un



lavoro → essendo E conservativo

quindi dipenderà solo dallo stato iniziale e quello finale

Possiamo pensare il processo di carica come al passaggio di cariche " dq " dall'armatura negativa a quella positiva:

$$dW = dU = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Positivo perché
compio lavoro
sulla carica

d.d.p.
ai capi
dell'armatura

Quindi il condensatore guadagna energia ad un dato istante

Quindi il lavoro complessivo sarà:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} = U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$$

Non dipende dal
processo effettivo di carica,
ma solo dallo stato
iniziale e finale del
mio sistema.

Il lavoro speso corrisponde
all'energia potenziale elettrostatica
accumulata dal condensatore

⇒ Per un condensatore piano: $V = E d$ & $C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v$$

Volume tra le
armature.

⇒ Possiamo quindi definire un'energia per unità di volume:

$$u_e = \frac{U_e}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Densità di energia elettrostatica



Questa formula ha una valenza generale

⇒ Consideriamo ora che una delle due armature sia libera di muoversi.

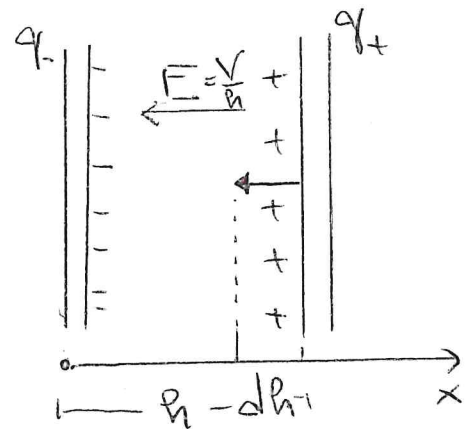
Le cariche di segno opposto esercitano una forza attrattiva parallela al campo E



Nell'avvicinarsi, la carica sulle

armature resta costante, $C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$

aumenta, e quindi la d.d.p. diminuisce $V = Eh = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}$



$$dW = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV \Rightarrow \vec{F} = -\frac{dU_e}{dh} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} = -\frac{\sigma^2 \Sigma}{2\epsilon_0}$$

↙
↘
Il sistema
perde energia

↳ Lavoro compiuto
dalle forze del campo

$$U_e = \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 \Sigma}$$

Orro la pressione elettrostatica

risulta

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Pressione
Elettrostatica

Ha validità generale,

✓ distribuzione di
carica sup.le e geometria
delle armature

↙
Coincide con la densità
di energia elettrostatica

⌀ Dipolo Elettrico

Consideriamo un sistema costituito da 2 cariche puntiformi $-q$ & $+q$, poste ad una distanza fissa d . $\downarrow$

Vedremo che molti sistemi fisici (e.g. molecola H_2O)

possono essere approssimate con un dipolo.

$\rightarrow$ In un punto P il potenziale sarà dato da:

$$V(P) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

distanza $\gg$ delle dimensioni del sistema

$\rightarrow$ Immaginiamo di allontanare $P \rightarrow \infty$, ovvero $r \gg d$, ovvero, che $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ sono circa paralleli e: (*)

$$\gamma \sim \theta \quad r_1 \cong r_2 \cong r \quad r_2 - r_1 = d \cos \theta$$

Vettore orientato dalla carica neg. a quella pos.

$$V(P_{r \gg d}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

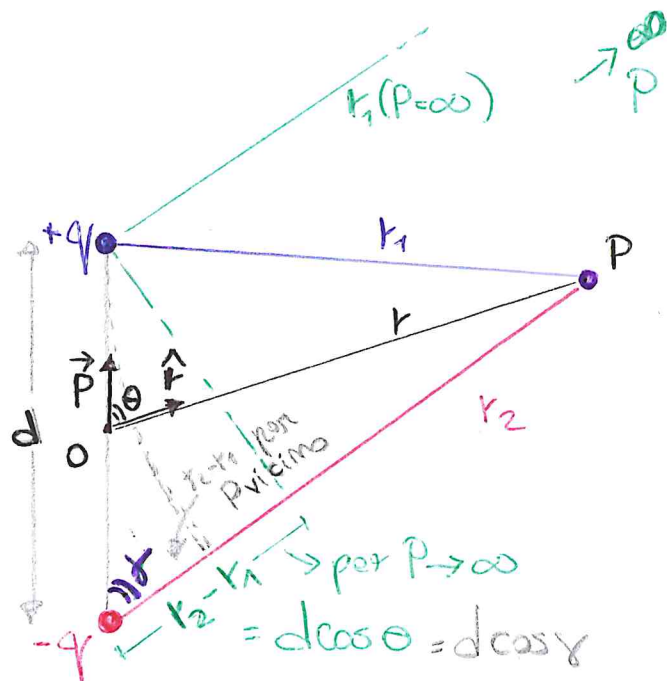
con $\vec{p} = q \vec{d}$

Momento di dipolo elettrico $[Cm]$

$\downarrow$ Decade + velocemente che nel caso di una carica

$\downarrow$ Fissato r è nullo sul piano $\perp$ a $\vec{p}$, e massimo sull'asse del dipolo

L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento p , non q e d separatamente. E.g. se prendo due cariche $\pm 2q$, a distanza $d/2$, avrò lo stesso potenziale



→ il campo elettrico lo ricaviamo come

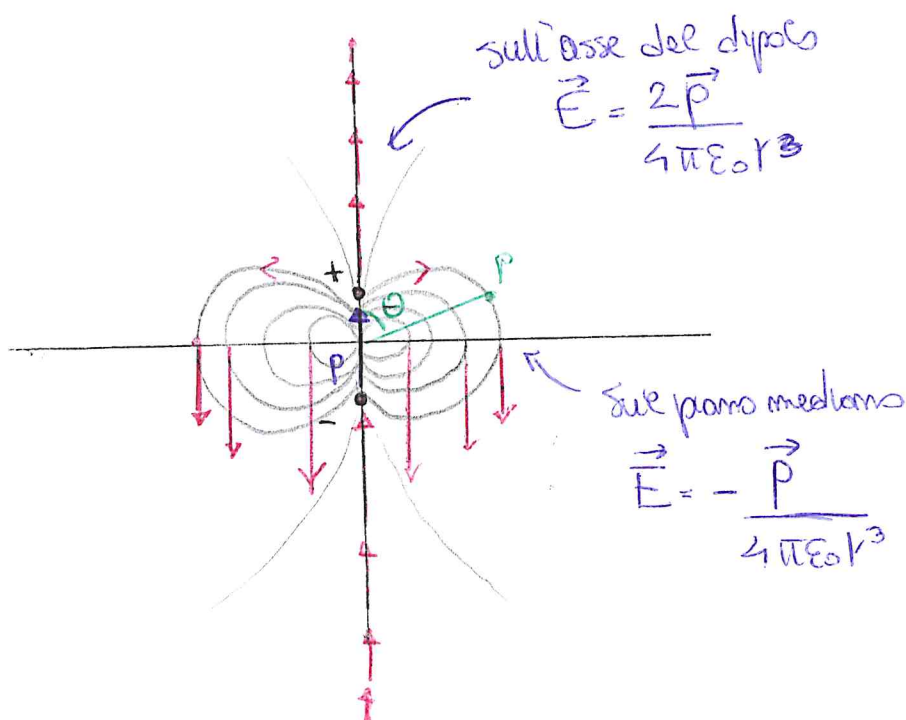
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

dipendenza cubica

↓
Data la simmetria cilindrica
del sistema rispetto all'asse
del dipolo

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

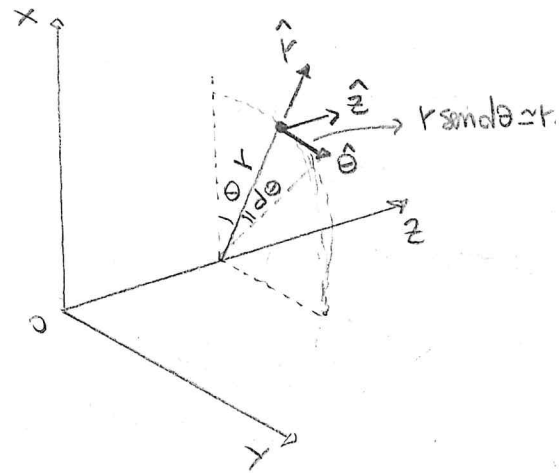
Simmetria
cilindrica
rispetto
all'asse del
dipolo



• In coordinate cilindriche lo spostamento infinitesimo:

$$\vec{dS} = (dr, r d\theta, dz) =$$

$$= dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z}$$



→ L'operatore $\vec{\nabla}$, le cui componenti rappresentano la variazione lungo una direzione, tenendo fisse le altre, è dato da:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S}$$

$$= (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r d\theta + (\nabla f)_z dz$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

definizione generale di df