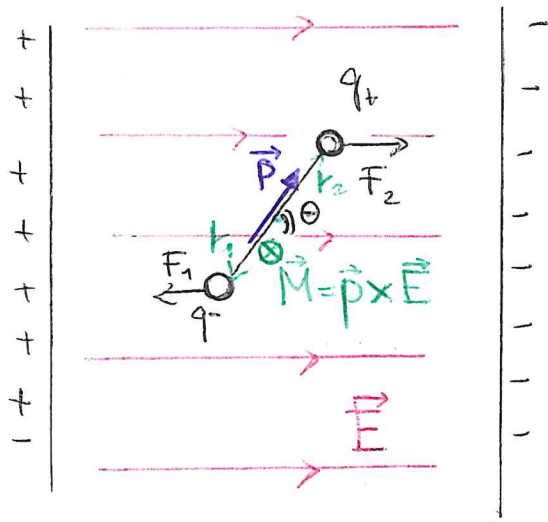


⇒ Forza su un dipolo:

Consideriamo un dipolo immerso in un campo uniforme $\vec{E}$.

Le cariche risultano della forza $\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}$ e $\vec{F}_2 = q_2 \vec{E}$,

che genera una coppia con momento Torcente non nullo



$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 = q \vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Calcolo rispetto al centro del dipolo

⇒ Questo tende a far ruotare il dipolo finché $\vec{p} \parallel \vec{E}$ (per cui $\vec{M} = 0$) e concorde. Il caso $\vec{p} \parallel \vec{E}$, ma discorde, è un caso di eq. instabile

⇒ Per piccole perturbazioni dalla posizione di eq. si instaura un moto armonico in cui il dipolo oscilla intorno alla posizione di eq. s.

⇒ L'energia potenziale associata al dipolo è:

$$U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

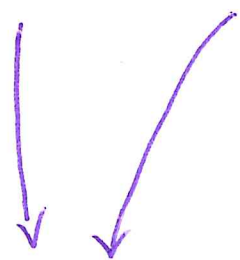
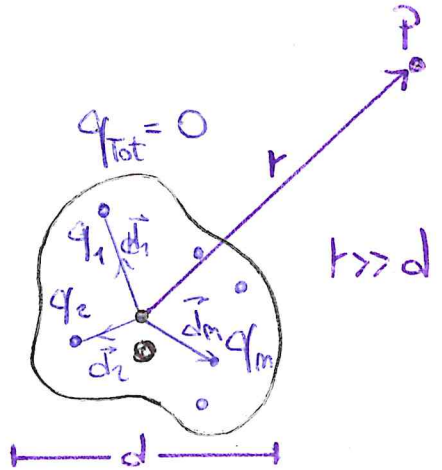
→ minima nella posizione di eq. stabile
 → massima " " " " eq. instabile

φ Approssimazione di dipolo per un sistema di cariche neutro:

→ Le formule ricavate per il dipolo elettrico semplice possono essere estese ad un sistema generico di cariche globalmente neutro (e.g. come un atomo o una molecola).

Fissato un punto qualsiasi "O" all'interno del sistema il potenziale in un punto P distante dalla distribuzione ($r \gg d$) risulta:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{con } \vec{p} = \sum_i q_i \vec{d}_i \quad \text{e } d_i \text{ distanza da O della carica } i\text{-esima}$$



σ se la carica è distribuita in modo continuo

$$\vec{p} = \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3r \quad \text{con } \vec{r} \text{ distanza dal centro "O"}$$

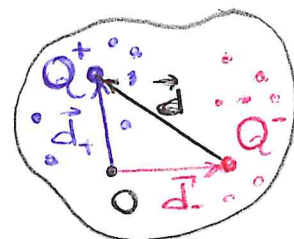
L'esistenza di un dipolo intrinseco in una distribuzione di carica è legata alla presenza di un'asimmetria ^{distribuzione delle} cariche positive e negative.

↳ Separando i contributi positivi e negativi:

Cariche positive e negative si eguagliano

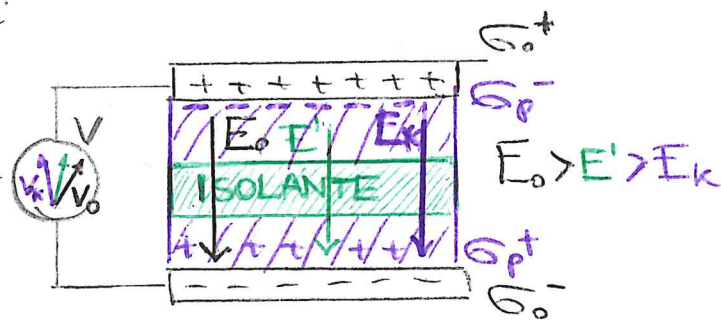
$$\vec{p} = \sum_i q_i^+ \vec{d}_i + \sum_j q_j^- \vec{d}_j = Q \vec{d}_+ - Q \vec{d}_- = Q \vec{d}$$

→ Invece approssimo il mio sistema ad un dipolo semplice, con cariche Q^+ e Q^- separate da una distanza $\vec{d}$



Dielettrici

→ Se inseriamo una lastra di materiale isolante tra le facce di un condensatore piano la d.d.p. tra le armature diminuisce.



Inoltre la d.d.p. diminuisce in modo lineare all'aumentare dello spessore della lastra

Chiamiamo V_k la d.d.p. ^{Tra le due armature} misurata quando il condensatore è completamente riempito di materiale isolante, e V_0 la d.d.p. iniziale. Si definisce il rapporto:

$$k \equiv \frac{V_0}{V_k} > 1 \quad \text{Costante dielettrica Relativa}$$

Il campo all'interno vale:

$$E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\epsilon_0} \Rightarrow \text{Ridotto dello stesso fattore } k$$

↗ Campo Elettrostatico Iniziale

Ovvero è ridotto di:

$$\Delta E = E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{k\epsilon_0} = \frac{k-1}{k} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E_k = E_0 - \Delta E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{k-1}{k} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} =$$

Ovvero il campo elettrico all'interno del dielettrico può essere visto come la sovrapposizione del campo prodotto dalle cariche σ_0 sulle armature, ed un campo di una distribuzione uniforme di cariche $\sigma_p = \frac{k-1}{k} \sigma_0$ ^{meè vuoto!!}, con segno opposto

→ la capacità di un condensatore riempito di dielettrico ϵ :

$$C_k = \frac{q_0}{V_k} = k \frac{q_0}{V_0} = k C_0 \Rightarrow \text{Aumenta di un fattore } k$$

→ Per il condensatore piano:

$$C_k = k C_0 = \frac{k \epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon \Sigma}{h}$$

dove abbiamo definito: $\epsilon = k \epsilon_0$

Costante dielettrica assoluta

Nota: il vuoto in questo senso può essere visto come un dielettrico con $k=1$ e $\epsilon = \epsilon_0$

Sostanza	k	Rigidità dielettrica* [V/m]
Aria	1.00059	$3 \cdot 10^6$
H ₂ O	80	
Alcol Etico	28	
Carta	3.7	$16 \cdot 10^6$
Vetro	4 ÷ 7	$20 \cdot 10^6$
↓ Da una misura della capacità di un materiale di polarizzarsi sotto l'azione di un campo E_0 esterno.		

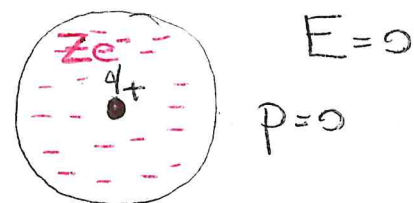
Rigidità dielettrica: Massimo valore del campo elettrico che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno

• Polarizzazione dei Dielettrici

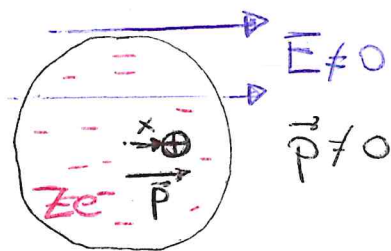
→ Le cariche σ_p introdotte per descrivere il campo interno non sono fittizie, ma il risultato dei processi microscopici che avvengono all'interno del dielettrico sotto l'azione del campo esterno

→ Approssimiamo gli atomi del nostro dielettrico come delle nubi di cariche negative con al centro un nucleo positivo.

In assenza di campo esterno la nube è distribuita in modo simmetrico rispetto al nucleo



Accendendo un campo E il centro di massa della nube negativa, ed il nucleo positivo



si spostano raggiungendo una posizione di equilibrio. Possiamo definire quindi un momento di dipolo elettrico:

$$\vec{p} = \sum q \vec{x}$$

↙

Ogni atomo (neutro) acquista un momento di dipolo elettrico, parallelo e concorde al campo esterno $\vec{E}$.

⇒ Polarizzazione Elettronica.

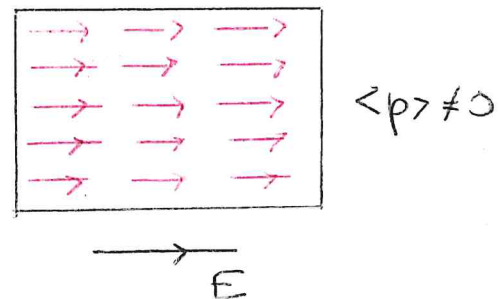
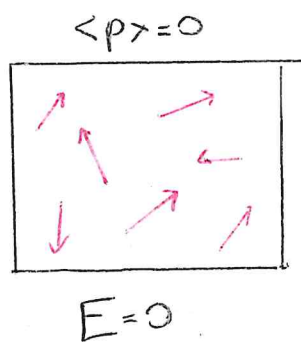
E anche molecole con un momento di dipolo intrinseco (e.g. H_2O), che se immerse in un campo $\vec{E}$ si orientano con il campo (Polarizzazione per orientamento)

→ in definitiva ogni atomo/molecola del dielettrico acquista un momento di dipolo elettrico medio $\langle \vec{p} \rangle$ parallelo e concorde al campo esterno $\vec{E}$.

↳ Per un volumetto $\Delta \epsilon$, contenente ΔN atomi/molecole il mom.to di dipolo risultante sarà $\Delta \vec{p} = \Delta N \langle \vec{p} \rangle$, ovvero per unità di volume:

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \epsilon} = \frac{\Delta N}{\Delta \epsilon} \langle \vec{p} \rangle = n \langle \vec{p} \rangle$$

↳ densità volumetrica di atomi/molecole



⇒ Per la maggior parte dei dielettrici risulta:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

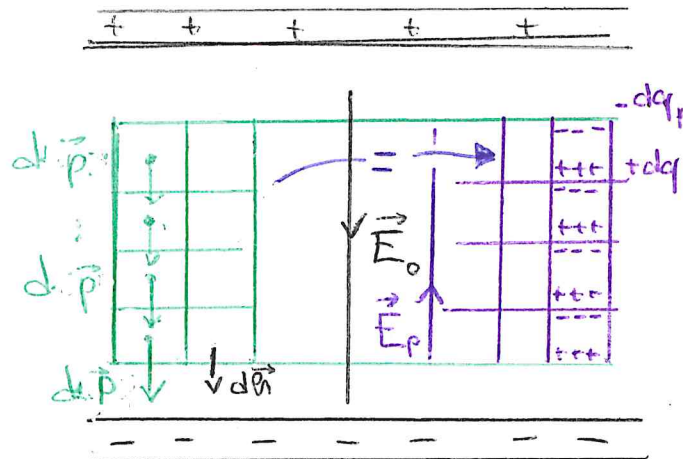
$$\chi = \kappa - 1$$

Suscettività
Elettrica
del
dielettrico

Valido per un
dielettrico "lineare"

↳ ovvero la polarizzazione
è proporzionale al campo

→ Immaginiamo di suddividere il nostro dielettrico in tanti prismi di volume $d\epsilon = d\Sigma_0 dh$. Ognuno di essi avrà un momento di dipolo:



$$d\vec{p} = \vec{P} d\epsilon = \vec{P} d\Sigma_0 dh = P d\Sigma_0 d\vec{h}$$

↳ orientato come $\vec{P}$

→ Possiamo quindi sostituire ogni prisma con momento $d\vec{p}$ con un sistema costituito da due cariche $\pm dq_p$ poste nel vuoto a distanza dh . ~~che~~ ^{che} ~~obtiene~~ lo stesso momento di dipolo:

$$d\vec{p} = \underbrace{dq_p dh}_\text{definizione dipolo} = P d\Sigma_0 d\vec{h} \Rightarrow \pm dq_p = \pm P d\Sigma_0$$

$$\Rightarrow \pm \sigma_p = \pm \frac{dq_p}{d\Sigma_0} = \pm P \Rightarrow \text{Il campo nel dielettrico sarà: } \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \hat{n} = \vec{E}_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \hat{n}$$

verso ass. z

→ All'interno del dielettrico, le cariche sulle basi in comune si annullano, mentre sulle facce del dielettrico non ho compensazione e mi si forma una distribuzione di carica $\pm \sigma_p = \pm P$.



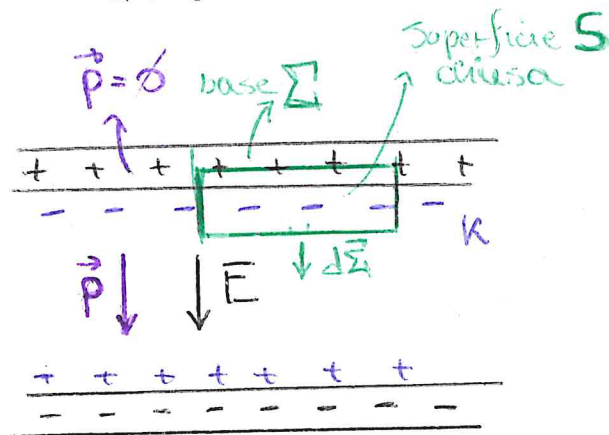
Nota: In questo caso le cariche non sono libere come nei conduttori, ma vincolate agli atomi

• legge di Gauss in presenza di dielettrici

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q + q_p}{\epsilon_0}$$

cariche libere cariche di polarizzazione

Scatola cilindrica con base di area Σ , immersa nel conduttore e nel dielettrico



$$q = \epsilon_0 \Sigma \quad \& \quad q_p = -\epsilon_p \Sigma = -P \Sigma$$

⇒ Calcoliamo il flusso di $\vec{P}$ attraverso la superficie S

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{\Sigma} = P \Sigma = -q_p$$

parallel
e concordi

↳ Solo la base immersa nel dielettrico contribuisce

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q - \oint \vec{P} \cdot d\vec{\Sigma} \right)$$

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{\Sigma} = q$$

⇒ Definendo il vettore:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Induzione Elettrica

$$\bullet \quad \Phi(\vec{D}) = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma} = q$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

↳ il flusso del vettore induzione elettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche LIBERE all'interno

Per un dielettrico lineare $P = \epsilon_0(k-1)E = \epsilon_0 \chi E$

$$\rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0(k-1)\vec{E} = \epsilon_0 k \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad *$$

$\rightarrow$ Nel caso di un condensatore piano $E = \frac{\sigma}{k\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon}$

e $\vec{D} = \sigma \hat{n}$

$$* \vec{P} = \epsilon_0(k-1)\vec{E} = \epsilon_0(k-1)\frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{k-1}{k}\vec{D} \Rightarrow \text{In un dielettrico lineare } \vec{P}, \vec{E}, \vec{D} \text{ sono paralleli}$$

Possiamo calcolare l'energia elettrostatica nel dielettrico:

$$\Rightarrow U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \sum h^2}{2\epsilon \sum 1/h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \underbrace{\sum h}_{\substack{\text{Volume} \\ \text{tra le} \\ \text{armature}}} \Rightarrow u_e = \frac{U_e}{\varphi} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

$\epsilon = k\epsilon_0$
con $k > 1$