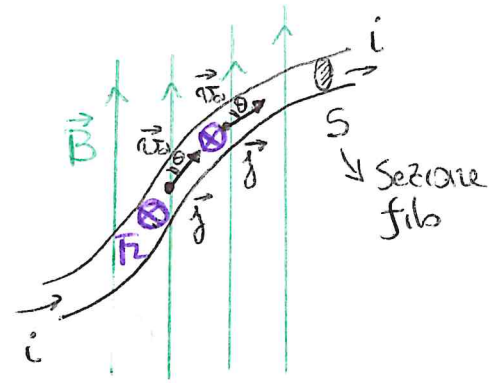


* Forza Magnetica su conduttore percorso da corrente

→ Consideriamo un filo conduttore immerso in un campo $\vec{B}$ ed attraversato dalla corrente i .

Riscriviamo $\vec{j} = nq\vec{v}_d \rightarrow$ velocità di deriva
 $i = \int \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \vec{j} S$
 densità cariche libere



le cariche sentono una forza $\vec{F}$ dovuta a $\vec{B}$ pari a:

$$\vec{F}_L = q\vec{v}_d \times \vec{B} \quad \text{di modulo } F_L = qv_d B \sin\theta$$

Nota: il campo $\vec{B}$ genera una forza non esercitata sulle cariche, a cui possiamo associare il campo $\vec{E} = \frac{\vec{F}_L}{q}$

↳ Tramite gli ioni con il reticolo cristallino le cariche "trasmettono" la forza alla massa del filo conduttore

In un tratto lungo "dl" del filo, con sezione S, sono contenuti $N = nSdl$ cariche, e la forza risultante è:

$$d\vec{F} = N\vec{F}_L = nSdl q\vec{v}_d \times \vec{B} = \underbrace{Sdl}_{\substack{\text{volume elemento di filo} \\ i = \vec{j}S}} \vec{j} \times \vec{B} = i d\vec{L} \times \vec{B}$$

Orientato come $\vec{j}$

Ogni tratto di filo è soggetto alla forza magnetica

$$\Rightarrow d\vec{F} = i d\vec{L} \times \vec{B}$$

Seconda legge di Laplace

Integrale al filo e al campo $\vec{B}$.

Se consideriamo un tratto finito di filo percorso da corrente stazionaria, la forza risultante sarà data dai vari contributi:

$$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{L} \times \vec{B}$$

↑
punti fissi perché costante

→ dunque, se un tratto di filo è rettilineo, ed il campo $\vec{B}$ uniforme

$$\vec{F} = i \left(\int_A^B d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = i \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Posso portare fuori dall'integrale perché
di modulo costante e con angolo costante
rispetto al filo

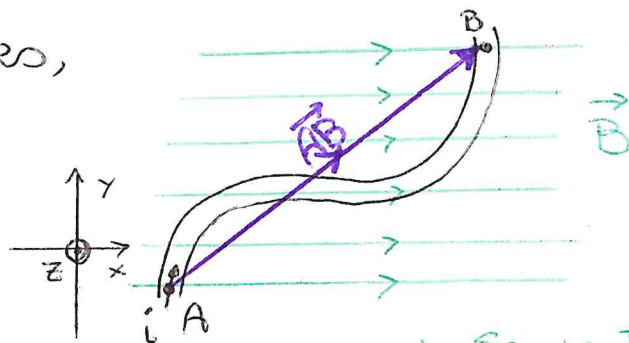
→ lunghezza del tratto $\overline{AB}$

→ Se il conduttore è curvilineo,
ed il campo $\vec{B}$ costante, si
verifica che:

$$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{\ell} \times \vec{B} = i \overline{AB} \times \vec{B}$$

Segmento che

unisce gli estremi $\overline{AB} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$



Nota: Se circuito
chiuso $A=B$
 $\overline{AB}=0$ e $\vec{F}=0$!

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ dx & dy & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

∴ Nel caso il circuito sia nel piano xy

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B} = i \begin{pmatrix} (B_z dy) \hat{u}_x - (B_z dx) \hat{u}_y + (B_y dx - B_x dy) \hat{u}_z \end{pmatrix}$$

$$(dx, dy, 0) (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{F} = i \left[\int_{x_A}^{x_B} dx (-B_z \hat{u}_y + B_y \hat{u}_z) + \int_{y_A}^{y_B} dy (B_z \hat{u}_x - B_x \hat{u}_z) \right] =$$

$$= i \left[(-B_z \hat{u}_y + B_y \hat{u}_z) \Delta x + (B_z \hat{u}_x - B_x \hat{u}_z) \Delta y \right] =$$

$$= i \left[B_z \Delta y \hat{u}_x - B_z \Delta x \hat{u}_y + (\Delta x B_y - B_x \Delta y) \hat{u}_z \right]$$

$$= i \overline{AB} \times \vec{B} \quad \text{con } \overline{AB} = (\Delta x, \Delta y, 0)$$

c.v.d.

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \Delta x & \Delta y & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

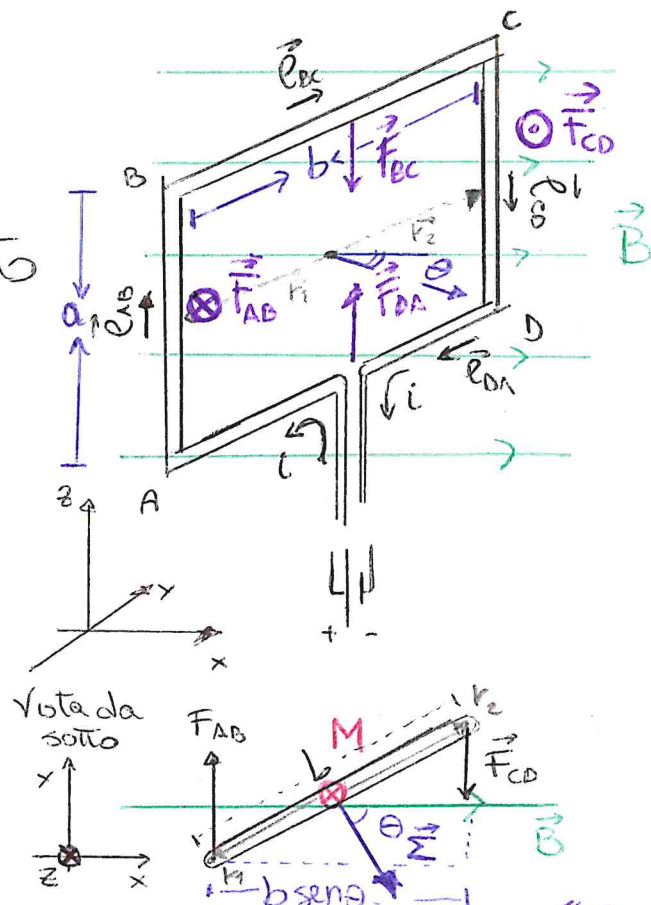
Spira percorsa da corrente immersa in campo $\vec{B}$ uniforme:

⇒ La forza totale risultante è nulla in quanto è un circuito chiuso ⇒ Però il momento delle forze è $\neq 0$!

⇒ Ogni tratto della spira subisce la forza:

$$\vec{F} = i \vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{DA} \Rightarrow \text{Coppia di forze di braccio nullo} \Rightarrow \text{momento nullo}$$



$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{CD} \Rightarrow$ Coppia di forze con braccio $\neq 0$, pari al seno della spira $\Rightarrow$ Genera un momento torcente che fa ruotare la spira fin tanto che ~~seno~~ il braccio $b \sin \theta$ non si annulla (per $\theta = 0, \pi$)

Nota: Si comporta come se avessimo messo una calamita (dipolo magnetico) all'interno di $\vec{B}$; questo avrebbe ruotato per far allineare il suo campo a quello esterno. $\rightarrow$ Corrente in una spira quindi genera un campo $\vec{B}$ di dipolo?

Il momento risulta: (rispetto all'asse della spira)

$$b \cdot a = \Sigma \equiv \text{Area Spira}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{AB} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{CD} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{AB} = 2 \vec{r}_1 \times \vec{F}_{AB} = b \sin \theta i a B \hat{u}_z$$

$$= i \Sigma B \sin \theta \hat{u}_z = i \vec{\Sigma} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

↳ Solita convenzione $\perp$ e mano dx

dove abbiamo definito il momento della spira $\vec{m} = i \Sigma$ magnetic

Momento
Torcente
sulla spira

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = i \vec{\Sigma} \times \vec{B} \quad \text{con } \vec{m} = i \vec{\Sigma}$$

momento
magnetico
della spira

Risultato nullo se $\vec{m} \parallel \vec{B}$

$\theta = 0$ eq. stabile

$\theta = \pi$ eq. instabile

In particolare per piccole perturbazioni intorno alla posizione di equilibrio si instaura un moto oscillatorio armonico. $\rightarrow$ stesso comportamento di un dipolo elettrico immerso in campo $\vec{E}$

$\rightarrow$ L'energia potenziale legata alla posizione della spira è:

$$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta = -i \Sigma B \cos \theta$$

Che è minima nella posizione di equilibrio e massima per $\theta = \pi$

$\rightarrow$ Notiamo che $\Sigma B \cos \theta = \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}$ corrisponde al flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira, ovvero:

$$U_p = -i \phi(B)$$

ovvero
 $\rightarrow$ la forza magnetica, che tende a portare la spira nella posizione di eq. (nella configurazione con energia p.le minima), agisce in modo da massimizzare il flusso magnetico attraverso il circuito. $\Rightarrow$ Questo andamento ha carattere generale

$$dW = -dU_p = i d\phi(\vec{B}) = i \vec{\nabla} \phi(\vec{B}) \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{F} = i \vec{\nabla} \phi$$

• Motore Elettrico

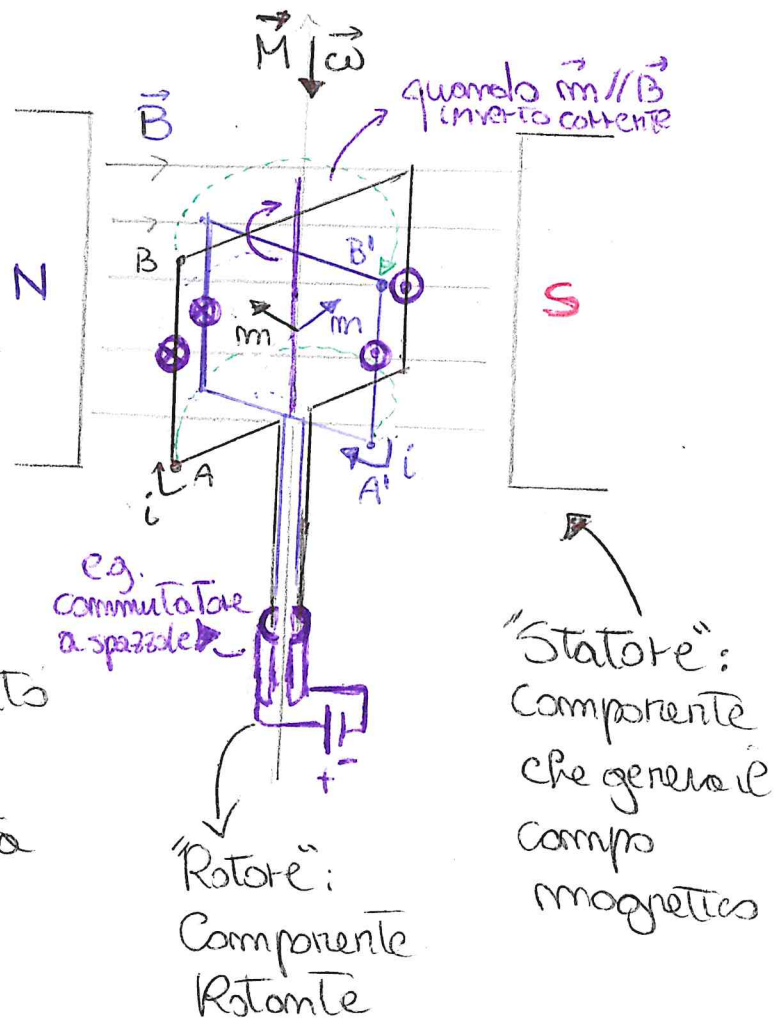
→ È possibile instaurare un moto rotatorio continuo della spira invertendo il verso della corrente ogni mezzo giro



Questa inversione avviene tramite un commutatore (nel caso di motore alimentato a corrente continua), o formando corrente alternata al motore



Vedremo che un sistema analogo può essere utilizzato per convertire energia meccanica in elettrica, ovvero per fare un generatore



◊ Campo Magnetico prodotto da una corrente

→ Abbiamo visto che una carica in moto o una corrente subiscono una forza se immersi in un campo magnetico.

↳ In analogia con le cariche ed il campo elettrico, possiamo quindi considerare le cariche in moto come le sorgenti del campo magnetico.



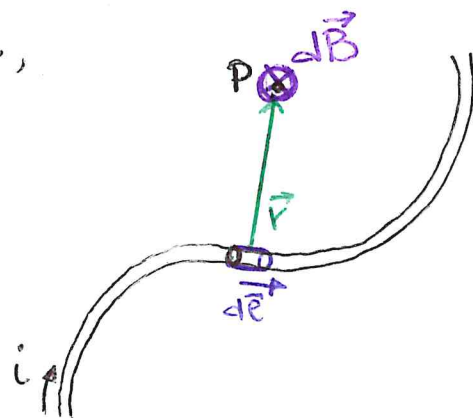
Gli esperimenti di Oersted (1820) dimostrano appunto che un filo percorso da corrente genera un campo magnetico, ponendo le basi dell'elettromagnetismo.

◊ Si trova che un tratto infinitesimo di filo dl , percorso dalla corrente i , produce nel punto P a distanza r dal filo il campo magnetico:

I legge di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

↑ vettore tangenziale al filo concorde con i
 ↑ vettore radiale
 ↓ Modulo distanza



Nota analogia

$$\text{con } d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Permeabilità magnetica nel vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

⇒ Per un tratto finito di filo il campo risultante in un p.to sarà dato dalla somma dei contributi infinitesimi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

→ partendo dalla I^a legge di Laplace possiamo calcolare il campo prodotto da una carica in moto;

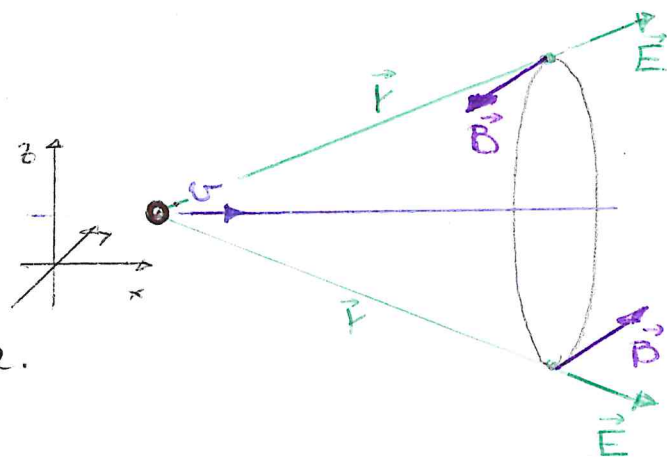
Notiamo che: $j = i / \Sigma$ ^{sezione filo} $\vec{j} = nq\vec{v} \Rightarrow i d\vec{\ell} = \vec{j} \Sigma d\vec{\ell} =$
 $= j d\vec{\ell}$
 $= nq\vec{v} d\vec{\ell}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \underbrace{n d\vec{\ell}}_{\substack{\text{Volumetto corrispondente} \\ \text{al tratto } d\vec{\ell} \\ \text{\# di cariche} \\ \text{contenute nel} \\ \text{Tratto } d\vec{\ell}}}$$

Quindi per una singola carica in moto con velocità $\vec{v}$ esterno:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Mette in evidenza che il campo magnetico dipende dal moto delle cariche, indipendente dalla causa del moto stesso.



→ Ricordando il campo prodotto da una carica (assumendo la validità anche se la carica è in moto)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \Rightarrow \text{ovvero } \vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \vec{v} \times \vec{E}$$

→ Queste relazioni sono valide fin tanto che $(v/c)^2 \ll 1$ ma evidenziano la relazione tra campo elettrico e magnetico

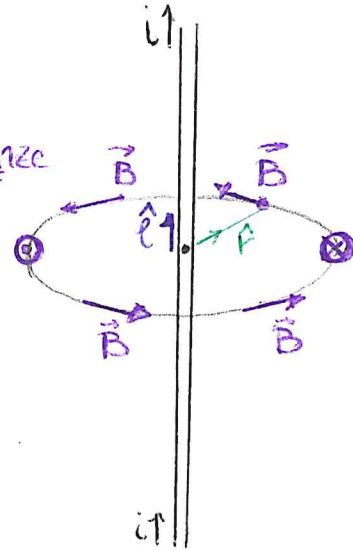
→ legge di Biot-Savart

Il campo magnetico prodotto da un filo indefinito rettilineo percorso da corrente i :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{e} \times \hat{r} \rightarrow \text{le linee di campo sono delle circonferenze concentriche al filo}$$

↓
Distanza minima tra il filo ed il punto in considerazione

Il modulo del campo varia come $1/R$



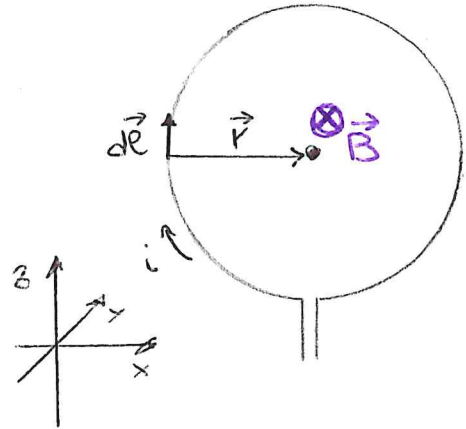
→ Campo magnetico al centro di una spira; circuito:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2} \stackrel{d\vec{e} \perp \hat{r}}{=} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{e}}{r^2} \hat{j}$$

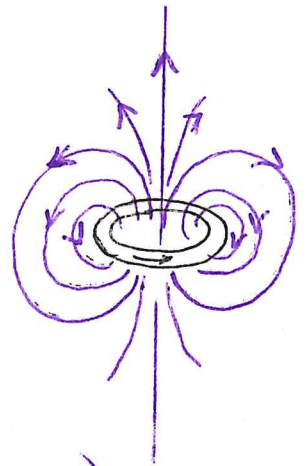
Al centro

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \oint d\vec{e} \hat{j} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} 2\pi r \hat{j} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2r} \hat{j} \Rightarrow \text{Punto in cui il campo ha intensità massima}$$



→ In generale, il campo magnetico prodotto da una spira ha la stessa struttura di un campo elettrico di dipolo (a grandi distanze dal sistema):

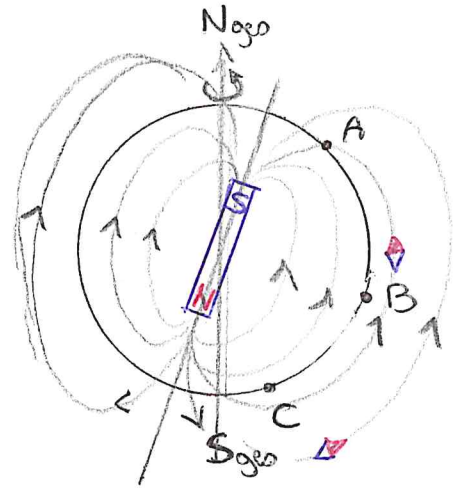


$$\vec{B} = B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

con $m = i \Sigma$ momento magnetico di dipolo

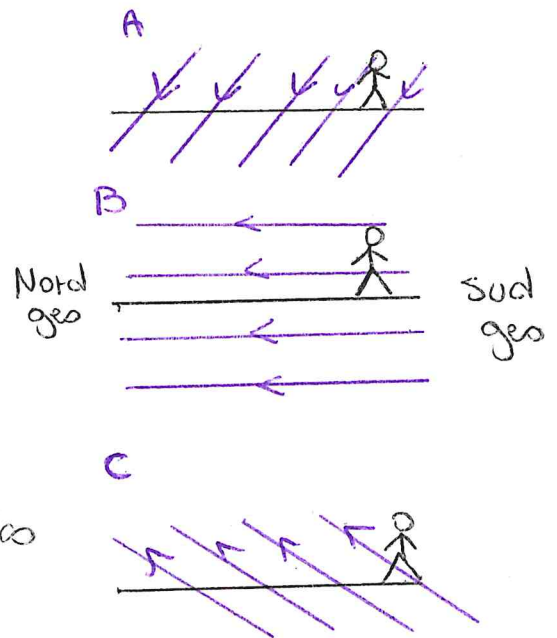
Campo Magnetico Terrestre

→ Può essere approssimato ad un campo di dipolo che forma un'angolo di 15° con l'asse di rotazione terrestre. Segueno la convenzione dei segni il polo nord geografico è in direzione del polo sud magnetico.



→ Il valore del campo è minimo all'equatore ($2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$) e massimo ai poli ($\sim 7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$)

→ Nell'emisfero nord (A) la componente B_r è negativa (punta verso la sup.cie), mentre è positiva nell'emisfero sud (C)



→ Il momento di dipolo geomagnetico ha un valore di:

$$m_{\oplus} = \frac{4\pi B_r R_{\oplus}^3}{2\mu_0 \cos\theta} = \frac{4\pi B_{\theta} R_{\oplus}^3}{\mu_0 \sin\theta} \approx 1.08 \cdot 10^{23} \text{ Am}^2$$