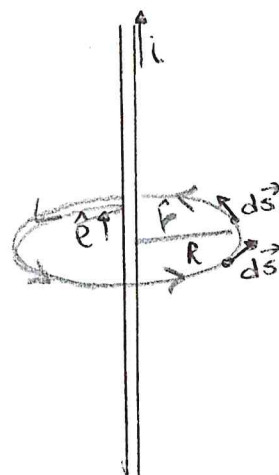


La legge di Ampère - Maxwell

Calcoliamo la circolazione di $\vec{B}$ lungo una circonferenza C centrata sull'asse di un filo rettilineo indefinito:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \oint_C \hat{s} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \int_C ds \Rightarrow$$

$\hat{s} \times \hat{r} \Rightarrow$ il prodotto di questi vettori, è un vettore tangente alla circonferenza ovvero $\parallel$ a $d\vec{s}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 i = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \Rightarrow \text{Legge di Ampère}$$

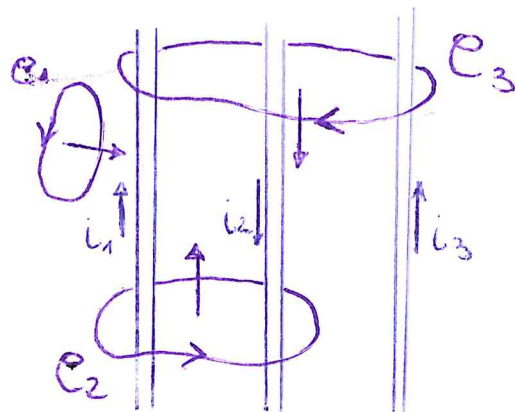
Questa relazione è valida in generale $\forall$ percorso chiuso C .
 Se il percorso NON concatena nessuna corrente allora $i=0$, e la circolazione di $\vec{B}$ è nulla.

Se il percorso concatena più correnti, i rappresenta la somma algebrica delle correnti concatenate:

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (-i_1 + i_2 - i_3)$$

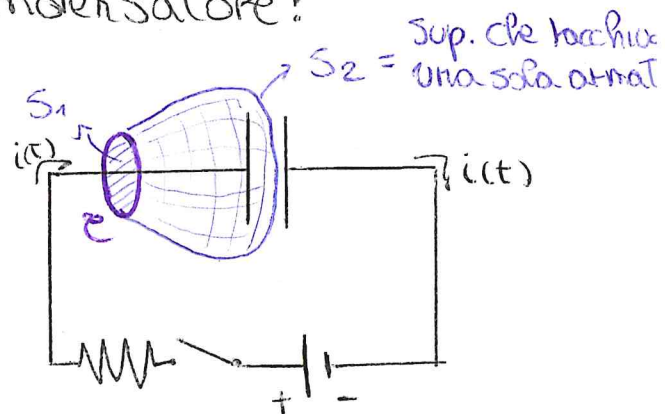


Nota: il segno della corrente dipende dall'orientazione di C ; positivo se concorde (in accordo con mano a destra), <0 viceversa

Per quale sup. vale la legge prima enunciata?

⇒ la legge per la circolazione di $\vec{B}$ così espressa non ha validità generale; consideriamo infatti il processo di carica di un condensatore:

Quando chiudo il circuito il condensatore si carica e passa una corrente non stazionaria nel circuito, $i(t) = \frac{dq}{dt}$



Se considero la sup. S_1 (relata da $\mathcal{C}$):

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i = \mu_0 \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$$

ma se considero S_2 , che poggia su $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i \neq \mu_0 \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \Rightarrow \text{il flusso di corrente } \vec{j} \text{ è nullo, quindi non vale l'uguaglianza!}$$

⇒ Questa situazione esemplifica il fatto che la legge di Ampère è valida solo in caso di correnti stazionarie.

→ Poteremo notare la stessa cosa considerando la forma differenziale della legge di Ampère e conservazione della carica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

densità di carica
inoltre $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$
trascurando
Valido in generale
per vettore

Nel caso stazionario $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ e vale

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Ma in generale: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \neq \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Non vale
l'uguaglianza

→ per rendere la legge una "legge di natura" cioè valida in generale, notiamo che al passaggio di corrente $i(t) = \frac{dq}{dt}$ nel circuito corrisponde una variazione di carica sulle armature, $\pm dq/dt$, e quindi del campo tra esse $\vec{E}(t) = q(t)/\epsilon_0 \Sigma$.

Attraverso la S_2 avremo quindi un flusso ^{di campo elettrico} $\phi(E)$, che varia nel tempo; $\phi(E) = E(t)\Sigma = q(t)/\epsilon_0$
 $\uparrow$
 ho assunto $S_2 \parallel \Sigma$
 e quindi $\vec{E} \parallel \vec{\Sigma}$ per
 semplicità

In analogia con la corrente di conduzione i che passa attraverso S_1 , definiremo la corrente che attraversa S_2 :

$$i_s = \frac{dq(t)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi(E)}{dt} \quad \text{Corrente di spostamento}$$

↳ Nel caso di carica/scarica del condensatore questo i_s è uguale alla i che attraversa il circuito!

⇒ Ora per rendere valida la mia legge $\nabla \times \vec{E}$ che ora è considerato il contributo di entrambe le correnti:

$$\oint_{\vec{e}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 (i + i_s) = \mu_0 \left[\int_S \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} + \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot \int_S d\vec{\Sigma} \right]$$

$$= \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi(E)_s$$

Nel caso $S=S_1$ il secondo termine è nullo, viceversa se $S=S_2$, il primo termine è nullo

↓
 In quanto nullo il campo $\vec{E}$ all'interno di un conduttore

→ Potremmo ottenere lo stesso risultato ragionando nel modo seguente:

il rotore di $\vec{B}$ sarà un vettore $\vec{J}$ con divergenza nulla

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \quad \text{quindi} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} \quad \text{con} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

→ Per trovare $\vec{J}$ ^{che soddisfa $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$} partiamo dall'eq. ne di continuità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

dalla legge di Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \rightarrow \rho = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \rightarrow \partial_t \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E}$

quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Nota: l'operazione di derivazione rispetto al tempo e rispetto allo spazio posso essere nell'ordine che preferisco

Il vettore $\vec{J} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, densità di corrente totale, ha divergenza sempre nulla!

Sostituendolo quindi a $\vec{J}$ nella legge di Ampère:

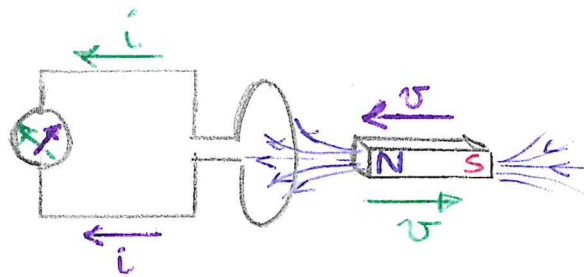
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_s)$$

o in forma integrale:

$$\oint_e \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = \mu_0 \underbrace{\int_s \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}}_i + \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}}_{\phi(\vec{E}^*)}$$

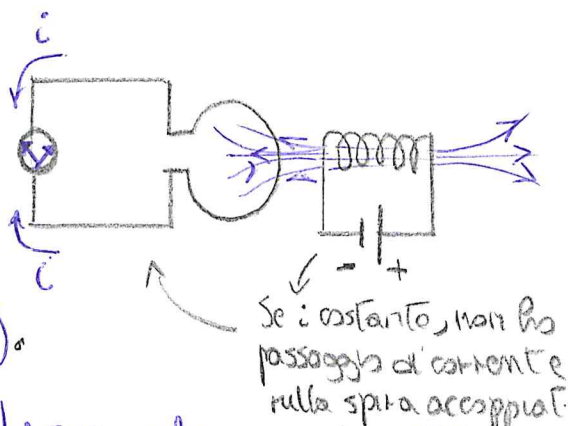
Induzione elettromagnetica

- Sperimentalmente si osserva che avvicinando o allontanando una magneti ad una spira, in essa scorre corrente, il verso della corrente e' opposto se si avvicina o allontana la spira, mentre la corrente e' nulla se non c'e' moto relativo.



Risultati analoghi si ottengono sostituendo il magnete con una spira percorsa da corrente (che genera un campo magnetico), o, ancora:

- Risultati analoghi si ottengono, mantenendo le due spire in quiete ma variando l'intensita di corrente (e quindi il campo $\vec{B}$) che attraversa la spira (o solenoide).



⇒ Da questi esperimenti Faraday dedusse che ogni volta il flusso del campo magnetico concatenato con un circuito varia nel tempo, si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta (che genera una corrente indotta) pari a:

$$f.e.m. = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi(B)}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Nota: Questo campo elettrico NON e' conservativo

← Campo Elettrico Indotto

Variazione temporale flusso B

legge di Lenz
La f.e.m. indotta e' sensibile da opporsi alla causa che l'ha generata.

La legge di Faraday rimane valida anche in assenza di un supporto fisico; ovvero la variazione di flusso magnetico genera un campo elettrico indotto; eventualmente, se il campo E_i agisce su un conduttore chiuso, si instaura una corrente indotta.

→ Possiamo ottenere una variazione del flusso in diversi modi. Infatti $\Phi(B)$ dipende da $|\vec{B}|$, $|\vec{S}|$, e dalla loro orientazione reciproca, $\hat{B} \cdot \hat{S}$; se una o più di queste varia nel tempo allora avremo $\frac{d\Phi(B)}{dt} \neq 0$.

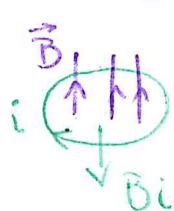
→ Fondamentalmente possiamo avere 2 situazioni distinte

a) Il moto di un conduttore rispetto a delle sorgenti di campo magnetico in quiete

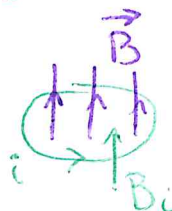
b) Variazione temporale del campo magnetico in un sistema di riferimento in cui il conduttore è in quiete

→ Il segno meno è legato alla legge di Lenz: l'effetto della f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata la stessa.

↳ Eg. la corrente indotta dalla f.e.m. ha un verso tale che il campo magnetico da essa generato si opponga alla variazione del flusso primario che l'ha generata



$$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \quad j_{em} < 0$$



$$\frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad j_{em} > 0$$