

Fenomeni Ondulatori:

- Onde elastiche: Hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi, e la loro propagazione è dovuta all'interazione tra gli atomi o le molecole del mezzo (e.g. onda sonora, o onda su una corda tesa)

↓
Possono essere
trasversali
o longitudinali
↙
oscillano lungo l'asse
di propagazione

↘
Ma non c'è trasporto di materia (atomi o mol.
oscillano attorno a posizione di eq. i.)

⇒ Vengono trasportate energia e quantità di moto

In generale: Onde una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga ad una velocità ben definita, trasportando energia e q.d.m., senza spostamento netto di materia

- Onde elettromagnetiche: Non hanno bisogno di un mezzo per propagarsi (e.g. luce che si propaga nel vuoto) ma possono propagarsi anche nei materiali. Esse hanno origine da una perturbazione del campo elettrico o magnetico, prodotta da cariche in moto.

↓
Sono solo
trasversali
(ovvero oscillano
in un piano ⊥
a quello di
propagazione)

La perturbazione di un campo che si propaga nello spazio viene rappresentata con la funzione:

questo è un
campo generico
tipo E, B

$$\xi(x, y, z, t)$$

Funzione
d'onda

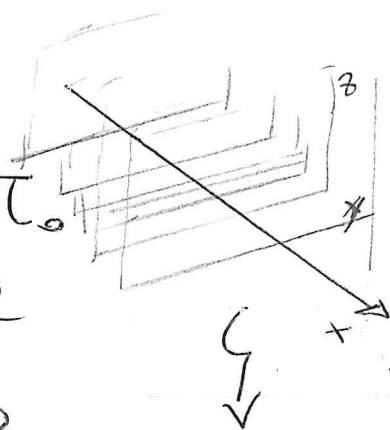
e soddisfa $\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$ *

* Onda Piana Unidimensionale: $\xi(x, t)$

dipende solo dalla coordinata lungo cui si propaga, x , in quanto la perturbazione in un certo istante t_0 assume lo stesso valore $\forall$ p.to del piano ortogonale (yz). In questo

caso:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$



Nota: Un'onda molto lontana dalla sua sorgente può essere spesso approx. con un'onda piana

=> Si dimostra che le funzioni d'onda soluzioni dell'eq.ne di d'Alembert sono quelle le cui variabili soddisfano:

$$\xi(x - vt), \xi(x + vt)$$

- Segno +, propagazione verso x Negative ($-x$)

- Segno -, propagazione verso x positive ($+x$)

ovvero l'argomento di ξ è una combinazione lineare delle variabili x e t .

Sono quindi soluzioni e.g.:

* $\xi = (x - vt)^2$, $\xi = \xi_0 \sin k(x - vt)$, $\xi = \xi_0 e^{k(x - vt)}$

e loro combinazioni lineari, mentre NON
lo sono e.g. $\xi = x \cdot v \cdot t$ o $\xi = x/vt$.

Questa è conseguenza del fatto che l'eq. di d'Ale.
è lineare in ξ .

Fisicamente $\xi(x \pm vt)$ rappresenta la propagazione
della perturbazione lungo l'asse x con velocità v ;
il valore $\xi_0 = \xi(x_0, t_0)$ si ritrova in qualsiasi
istante successivo $t > t_0$ nel p.to x che soddisfi
la condizione:

**)

$$x \pm vt = x_0 \pm v t_0 \Rightarrow x = x_0 \pm v(t - t_0)$$

↙ ↘
Ovvero quando la
funzione d'onda
ha lo stesso argomento

↙
Segno "+" propagazione
nel verso di x ,
ovvero l'argomento
è $x - vt$

↘
eq. in moto rettilineo
lungo x

↘
Segno "-" propagazione
verso negativo di x ,
ovvero l'argomento
è $x + vt$

$\therefore \xi(x \pm vt)$ soddisfa d'Alembert:

definiamo $u = x - vt$

per cui $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ & $\frac{\partial u}{\partial t} = -v$

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \quad \text{derivata funzione composta}$$

$$\frac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \quad *$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial n \partial u} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \xi}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \xi}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} =$$

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

↓ perché $u = x - vt$

$$\frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \quad **$$

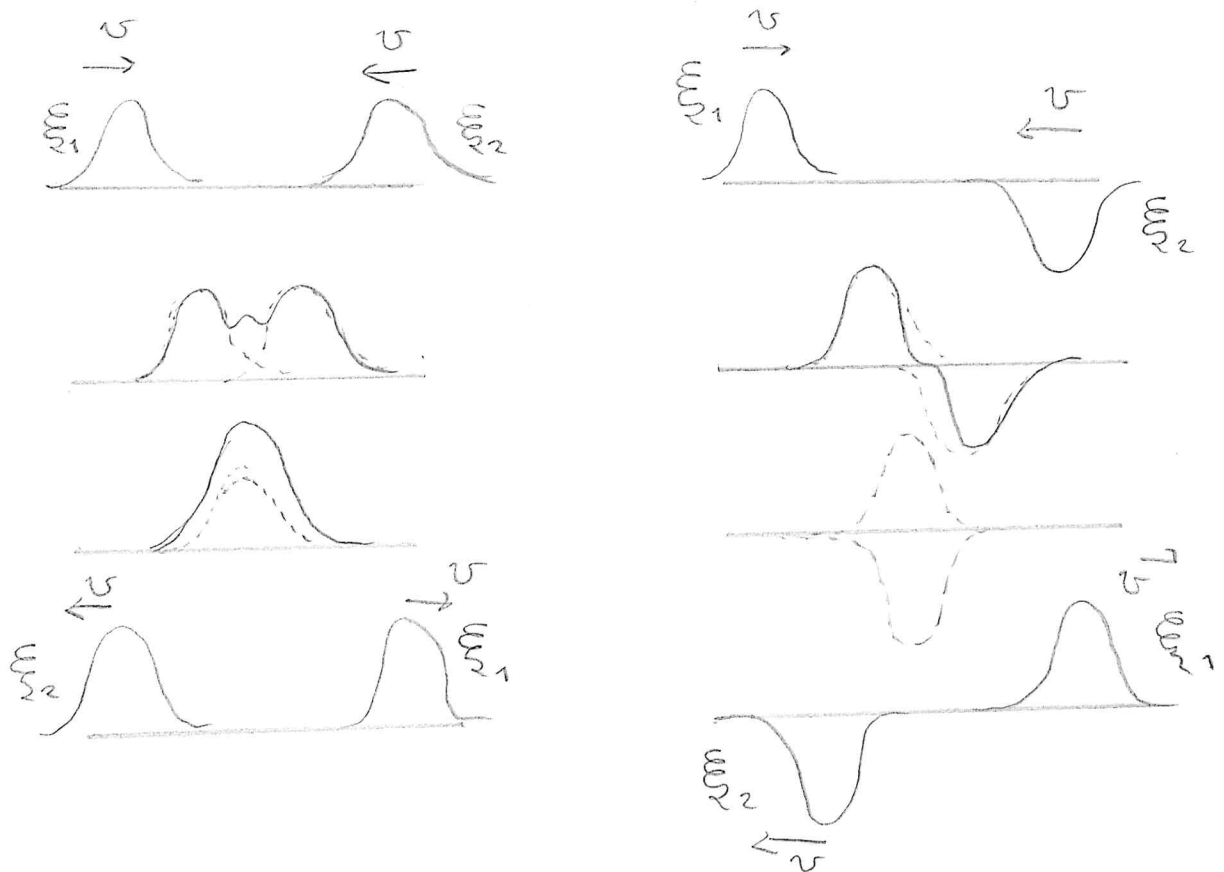
da * & ** si ricava che

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial n^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{c.v.d.}$$

Nota: La linearità (in ξ) dell'eq. di d'Alembert implica che la somma di due funzioni ξ_1 & ξ_2 soluzioni dell'eq., è ancora soluzione dell'eq.:

ovvero la sovrapposizione di 2 onde è ancora un'onda, che si ottiene p.to x p.to e al istante x istante sommando ξ_1 e ξ_2 .

Questo implica che le 2 onde restano indipendenti, anche se agiscono insieme, e non vengono modificate l'una dalla presenza dell'altra. Questo principio di sovrapposizione è all'origine del fenomeno dell'interferenza.



Onde piane Armoniche: (1D)

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x - vt)]$$

↳ Analogamente potevo usare il coseno

ξ_0 = Ampiezza Onda

k = numero d'onda

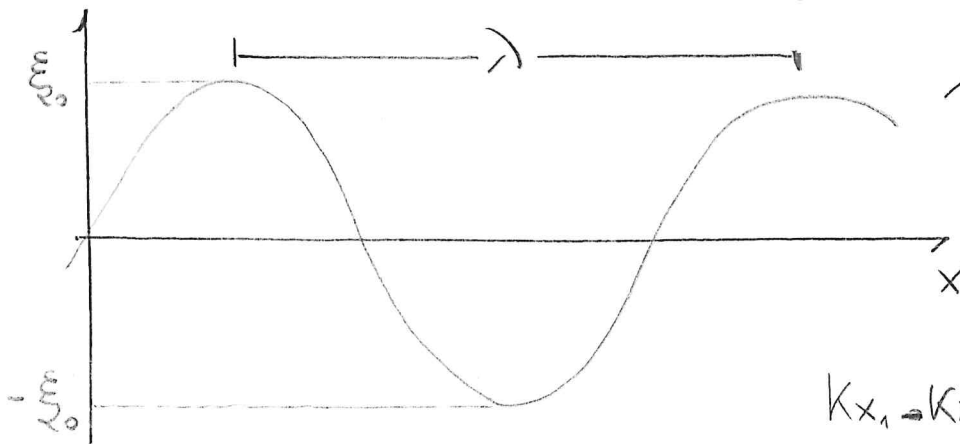
In genere si definisce la pulsazione:

$$\omega = kv$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{argomento}})$$

Così definita è una
quantità adimensionale
come giusto per l'argomento
di un seno

Ad un dato t : (come se facessi una foto)



→ Seno è una funzione
con periodo 2π ,
quindi dati 2 p.ti
 x_1 e x_2 per cui val
la relazione

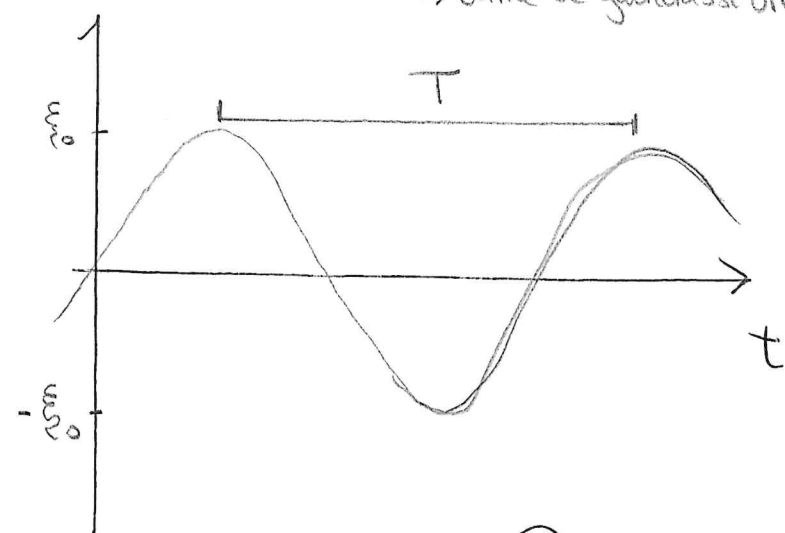
$$kx_1 - kx_2 = \underbrace{k(x_1 - x_2)}_{\lambda} = 2\pi, \text{ la}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{lunghezza d'onda}$$

funzione si replica
identica

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \# \text{ di lunghezze d'onda in } 2\pi^{\text{metri}} \text{ Una sorta di pulsazione "spaziale"}$$

per un x fissato analogamente:
 ↳ Come se guardassi un solo punto



L'onda si ripete identica
 $\Rightarrow$ per intervalli di tempo
 che soddisfanno: $\omega t_1 - \omega t_2 =$
 $= \omega(t_1 - t_2) = 2\pi$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_T$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Periodo dell'onda $\Rightarrow$ quindi $\omega = \frac{2\pi}{T}$ # di periodi in 2π secondi

Altre due grandezze derivate sono

• $m = \frac{1}{\lambda}$ [m^{-1}] # di lunghezze
 d'onda in un metro

• $\nu = \frac{1}{T}$ [s^{-1}] Frequenza, ovvero il numero
 di battiti in un secondo

Dalle relazioni precedenti Troviamo le relazioni:

$$\underbrace{k}_{\frac{1}{\lambda}} \lambda = T \underbrace{\omega}_{\frac{2\pi}{T}} \Rightarrow k \lambda = T \underbrace{k}_{\frac{1}{\lambda}} \nu \Rightarrow \lambda = \nu T \rightarrow$$

$$\& \nu \lambda = \nu$$

Questa relazione
 ci dice che in un
 periodo T , l'onda
 avanza di λ

Ovvero le tre grandezze che descrivono un'onda
 armonica NON sono indipendenti

Nota: Da un punto di vista fisico il periodo (e quindi ν e ω) di un'onda em è determinato solamente dalle caratteristiche della sorgente, mentre la velocità di propagazione, e quindi λ e k , dal mezzo di propagazione.

→ Fronte d'onda:

Definita la fase dell'onda:

$$\phi = kn - \omega t \quad \text{Fase Onda}$$

possiamo definire il fronte d'onda il luogo di p.ti dello spazio in cui, ad un dato istante, la fase è costante, ovvero la funzione d'onda ϕ ha valore costante. E.g. per un'onda piana, il fronte d'onda corrisponde al piano $\perp$ alla direzione di propagazione, e quest'ultimo si sposta alla velocità v .

→ Polarizzazione di un'onda:

Consideriamo un'onda piana Trasversale che si propaga lungo x . La funzione d'onda può essere espressa come:

ovvero
oscilla in
un piano
⊥ a quello
di propagazione

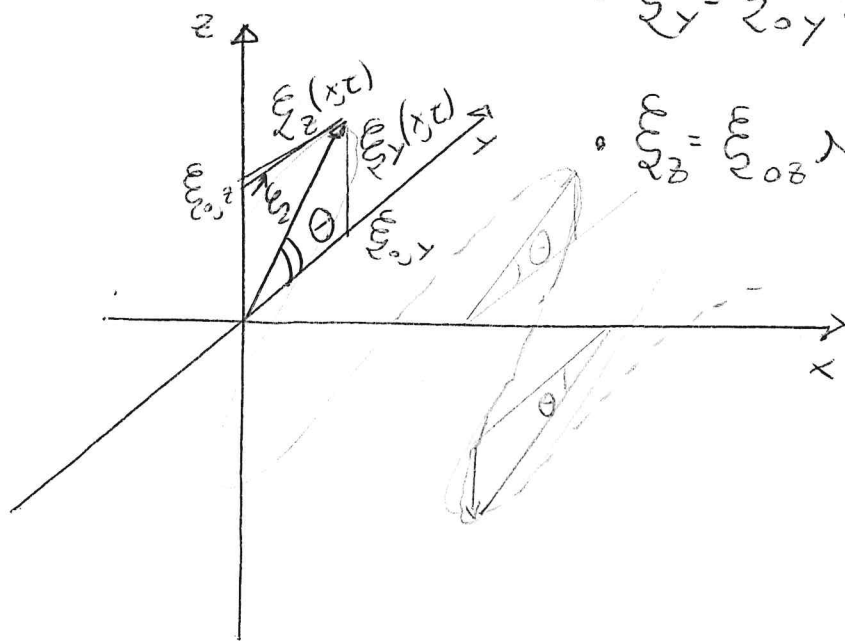
$$\vec{\xi}(x,t) = (\xi_y(x,t), \xi_z(x,t))$$

Assumiamo siano 2 onde armoniche

$$\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t)$$

$$\xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta)$$

↙
Sfasamento
tra le compo-
nenti.



→ Se la direzione di $\vec{\xi}$ nel piano yz non varia casualmente l'onda si dice polarizzata → questo dipende dallo sfasamento

Consideriamo il caso $\delta = \text{costante}$

→ $\delta = 0$: Componenti in fase; in ogni punto dell'os-
 x , ed ad ogni istante $\vec{\xi}$ ha direzione
fissa, formante con l'asse y l'angolo

$$\tan \Theta = \frac{\xi_z}{\xi_y} = \frac{\xi_{0z}}{\xi_{0y}} = \text{costante} \rightarrow \text{il rapporto tra le ampiezze delle due componenti è sempre costante}$$

• $\beta = \pi$: Opposizione di fase : $\vec{E}$ ha sempre direzione costante, ma l'angolo con

$$x \text{ e } -\theta \rightarrow \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

$\Rightarrow$ Se $\vec{E}$ ha direzione fissa l'onda si dice Pol. Ta Linearmente
- Delta ξ_0 l'ampiezza dell'onda, e

componenti hanno ampiezza $\xi_{y,z} = \pm \xi_0 \sin \theta$

e $\xi_{y,z} = \xi_0 \cos \theta$:

In forma vettoriale avremo :

$$\vec{E}(x,y) = \overbrace{\xi_0 \cos \theta}^{\xi_{0,y}} \sin(kx - \omega t) \hat{u}_y + \underbrace{\pm \xi_0 \sin \theta}_{\xi_{0,z}} \sin(kx - \omega t) \hat{u}_z$$

$\downarrow$
 $= +$ per $\beta = 0$
 $= -$ per $\beta = \pi$

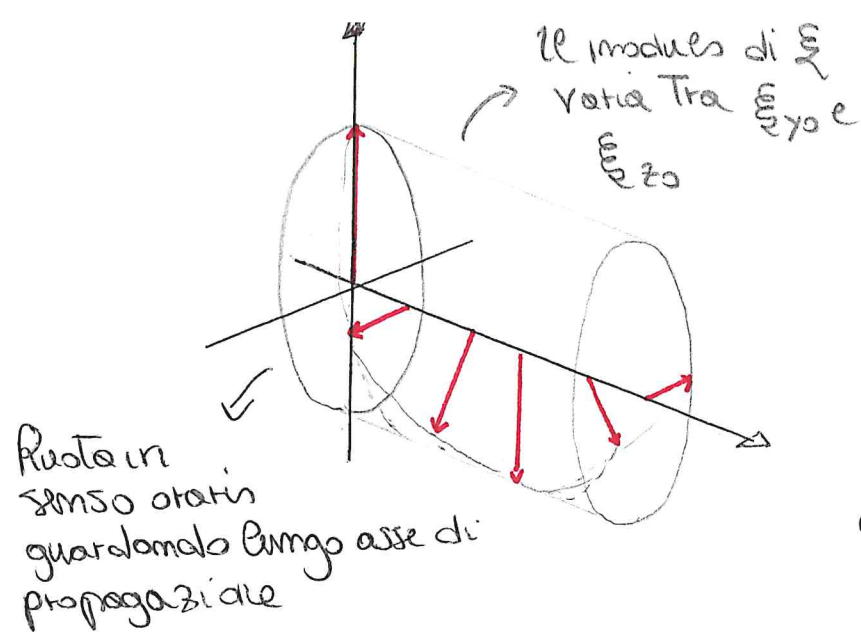
$\rightarrow$ Onda piana data dalla sovrapposizione di 2 onde piane polarizzate circolarmente lungo y e z

• $\beta = \frac{\pi}{2}$: In questo caso, dato che $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

abbiamo $\xi_z = \xi_{0,z} \cos(kx - \omega t)$, ed in ogni istante vale la relazione:

$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0,y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0,z}^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

Equazione di un'ellisse nel piano xz, ed assi // agli assi coordinati



Il vettore $\vec{E}$ descrive un'ellisse con periodo di rotazione $\frac{2\pi}{\omega}$, che ~~gi~~ è passo λ .
 ↳ ovvero da T o λ compie un giro

⇓
 Onda polarizzata ellitticamente

Analogamente per $\beta = \frac{3}{2}\pi$ si ha una polarizzazione ellittica, ma che ruota in senso ANTIORARIO guardando la direzione di propagazione.

Nel caso $E_{0,y} = E_{0,z} = E_0$ l'ellisse degenera in una circonferenza e l'onda si dice polarizzata circolarmente:

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$$

→ In questo caso l'ampiezza dell'onda è costante in modulus.

In generale se β = "costante generica", l'onda è polarizzata ellitticamente, ma con gli assi non // agli assi coordinati.

→ Se β non è esprimibile con una legge l'onda si dice NON polarizzata

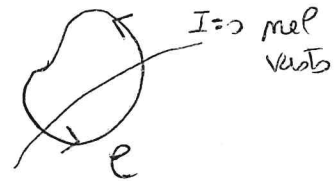
↓
 ovvero varia casualmente

→ Se $\therefore$ che il campo $\vec{E}$ & $\vec{B}$ soddisfano l'eq. di ^{Alembert} ~~Maxwell~~, allora $\vec{E}$ & $\vec{B}$ mi rappresentano un'onda che si propaga ~~formando~~ ^{come} ~~sistema~~ ^{equivalente}

→ Partiamo da Eq. Maxwell nel vuoto: (forma integrale)

$$\begin{aligned}
 1) & \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Legge di Gauss per } \vec{E} \\
 2) & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{" " per } \vec{B} \\
 3) & \oint_e \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad \text{Legge Ampere-Maxwell} \\
 4) & \oint_e \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{Legge Faraday-Neumann}
 \end{aligned}$$

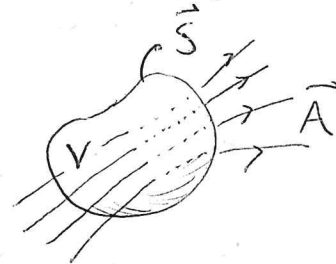
$\rightarrow$ Sempre zero perché non ci sono monopoli magnetici
 $\rightarrow$ Flusso elettrico
 $\rightarrow$ Flusso magnetico



→ Ricordiamo il Teorema della divergenza (di Gauss)

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

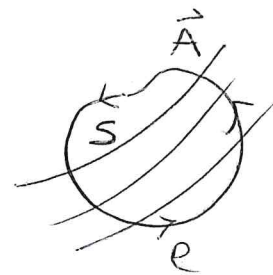
$\rightarrow$ Volume racchiuso dalla superficie
 flusso $\vec{A}$ attraverso $\vec{S}$



→ Ricordiamo il Teorema del Rotore (di Stokes)

$$\oint_e \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

Circolazione del campo $\vec{A}$
 flusso del rotore sulla superficie racchiusa dal circuito e



N.B. Qualsiasi superficie che poggia su e

applico a) a 1) & 2) e b) a 3) & 4)

$$\hat{1}) \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = 0$$

$$\hat{2}) \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0$$

$$\hat{3}) \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\int_S d\vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \int_S \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

Inverso $\int e \frac{d}{dt}$

flusso campo elettrico

$$\hat{4}) \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \left(\int_S d\vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

→ Da qui

Essendo $\hat{1}$ & $\hat{2}$ valide $\forall$ volume, ~~da qui~~ e $\hat{3}$ & $\hat{4}$ $\forall$ superficie:

$$\begin{cases} \hat{1} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \hat{2} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \hat{3} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \\ \hat{4} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \end{cases}$$

Eq. ne di Maxwell
in forma differenziale

Regola utile: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

grad $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$
div $= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

(12 Eq. ne e 6 incognite $\Rightarrow$ Quindi soluzione definita)
portando da $\hat{4}$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \stackrel{\text{da } \hat{1}}{=} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

0 per $\hat{1}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \frac{d}{dt} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{\text{per } \hat{3}}{=} \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0 \Rightarrow \text{Eq. ne delle onde di d'Alembert}$$

Componendo con l'eq. delle onde si ricava

che : $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ Km/s}$

↙
Velocità propagazione

Con gli stessi passaggi, partendo da 3:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \text{Eq. di un'onda Magnetica}$$

Introducendo il d'Alembertiano: $\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

↓
Operatore
Differenziale

$$\begin{cases} \square \vec{E} = 0 \\ \square \vec{B} = 0 \end{cases}$$

→ Orso l'eq. di Maxwell implicano che il campo elettrico e magnetico si propagano come delle onde che si dimostra viaggiano in modo perpendicolare tra loro alla velocità c .

Nota su numeri complessi e la coordinata temporale:

$$\vec{E}(\vec{x}; t) \xrightarrow[\substack{a = ict \\ \uparrow \\ \text{immaginario}}]{\substack{\text{cambio} \\ \text{variabile } T}} \vec{E}(\vec{x}, u)$$

$\downarrow$
 x, y, z

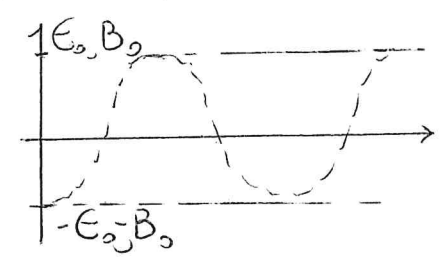
Derivata Temporale dell'Alambertiano:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \text{proviamo: } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial ict} \frac{\partial \vec{E}}{\partial ict} = \frac{\partial}{\partial ict} \left[\frac{1}{ic} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] =$$
$$= \frac{1}{(ic)^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Quindi il d'Alembertiano altro non è che il ~~laplaciano~~ Laplaciano ~~in 4 dimensioni~~ quadridimensionale.

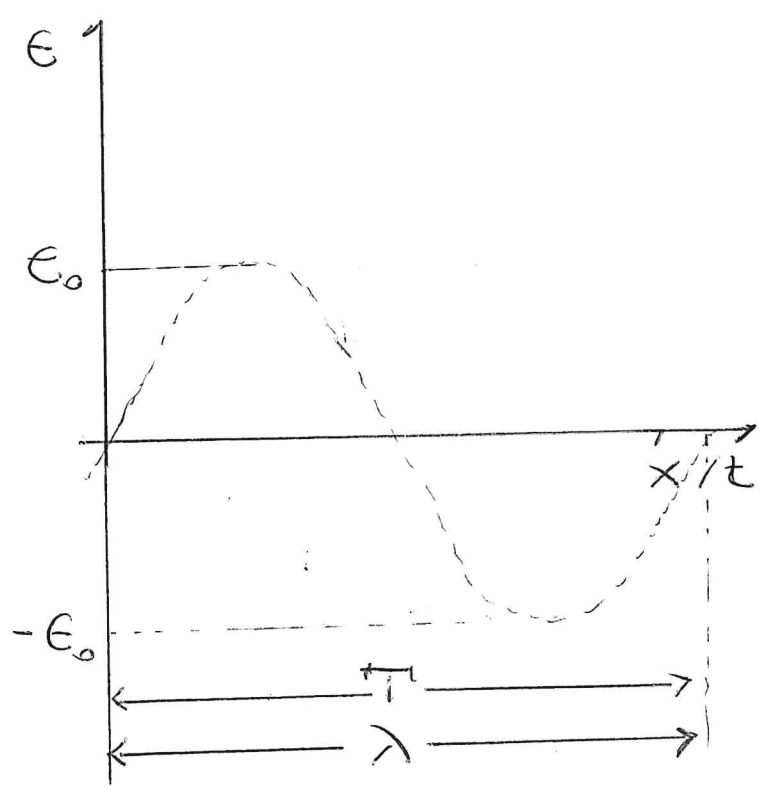
$$\square = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial u^2}$$

- funzione d'onda per i campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$ Onda piana Trasversale
(o forma)
- $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(Kx - \omega t)$ questo e' 1 forma d'onda, ma ne esistono ∞
- $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(Kx - \omega t)$ $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ ampiezza dell'onda



- $K = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi m$ periodicità del seno
com Sarebbe una "pulsazione" spaziale lunghezza d'onda (periodicità spaziale)
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$ pulsazione frequenza $[s^{-1}]$
periodo (periodicità temporale) H_z

- Numero d'onde $m = \frac{1}{\lambda} [m^{-1}]$ # di onde in 1 metro
- Frequenza: $\nu = \frac{1}{T} [s^{-1}]$ # di battiti in un secondo



- Onda piana la posso descrivere come un'onda che si propaga in una dimensione (e.g. asse x) ed e' uniforme nel piano ortogonale (e.g. piano yz). In genere, onde ~~emiss~~ a grandi distanze dalla sorgente possono essere approximate con un'onda piana (e.g. luce proveniente dal sole)

Un'onda piana è Trasversale, ovvero oscilla lungo il piano $\perp$ all'asse di propagazione.

Questo può essere
con le eq. di

Maxwell:

Consideriamo onda piana che propaga lungo x :

→ In generale le onde possono essere Trasversali e Longitudinali

(e.g. in genere le onde acustiche)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_x \text{ costante in } x \Rightarrow E_x = 0$$

poiché componenti E_y & E_z sono costanti lungo y e z ovvero variano solo lungo x

ovvero $E_y(x, t)$
 $E_z(x, t)$

ovvero $E_x = 0$
a meno di campi elettrostatici
(che visto che parliamo di onde non ci interessano)

Abbiamo quindi dimostrato che l'onda e.m. è nulla lungo la direzione di propagazione, ovvero

non oscilla lungo la direzione di propagazione, * e quindi dovrà oscillare lungo il piano Trasversale (stessa cosa per B)

osservando che $B_x = 0$ dato che nel vuoto non ci sono correnti stazionarie

→ Dalle equazioni di Maxwell che coinvolgono il rotore si ricava che $\vec{E} \perp \vec{B}$ e che $E = cB$.

Il prodotto $\vec{E} \times \vec{B}$ definisce il verso di propagazione

moduli dei campi



Consideriamo un'onda em che si propaga lungo x ; le soluzioni ($\neq 0$) dell'eq.ne d'onda sono:

$$\vec{E} = E_y(n-vt)\hat{u}_y + E_z(n-vt)\hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y(n-vt)\hat{u}_y + B_z(n-vt)\hat{u}_z$$

(Componente lungo x abbiamo visto essere nulla)

Dalla legge locale di Faraday-Lenz, per la componente y del rotore abbiamo: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \partial_x E_z \stackrel{(*)}{=} \partial_t B_y$$

$\downarrow$ in qto onda trasversale
componente $E_x = 0$ nel piano yz

sceita $u = x - vt$ $\partial_x u = 1$ & $\partial_t u = -v$

$$\partial_x E_z = \frac{\partial E_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \quad \partial_t E_z = \frac{\partial E_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial u} (-v) \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial u} = -\frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{1}{v}$$

$$\partial_x E_z = -\frac{1}{v} \partial_t E_z$$

Integrando (*) in dt :

$$B_y = \int \partial_t B_y dt = \int \partial_x E_z dt = -\frac{1}{v} \int \partial_t E_z dt = -\frac{E_z}{v} + \text{costante}$$

Possiamo porla a 0 in quant. legata a soluzi stazionarie

Abbiamo in definitiva:

$$B_y(n-vt) = -\frac{1}{v} E_z(n-vt)$$

analogamente partendo da componente 8 di $(\nabla \times E_z)$:

$$B_z(n-vt) = +\frac{1}{v} E_y(n-vt)$$

$$\Downarrow \\ \partial_t B_z = -\partial_x E_y$$

$\Rightarrow$ Invece le componenti dei campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$ Non sono indipendenti:

a) $\vec{E} = E_y(n-vt)\hat{u}_y + E_z(n-vt)\hat{u}_z$

b) $\vec{B} = -\frac{1}{v} E_z(n-vt)\hat{u}_y + \frac{1}{v} E_y(n-vt)\hat{u}_z$

$\Rightarrow$ da b) ricaviamo la relazione tra i moduli:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2} (E_z^2 + E_y^2) = \frac{1}{v^2} E^2$$

$\Downarrow$

$$E = vB = \frac{B}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare tra i campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v} (-E_y E_z + E_z E_y) = 0$$

N.B. prodotto scalare e' identicamente nullo se i vettori sono $\perp$ tra loro

$\uparrow$
I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$
sono ortogonali!

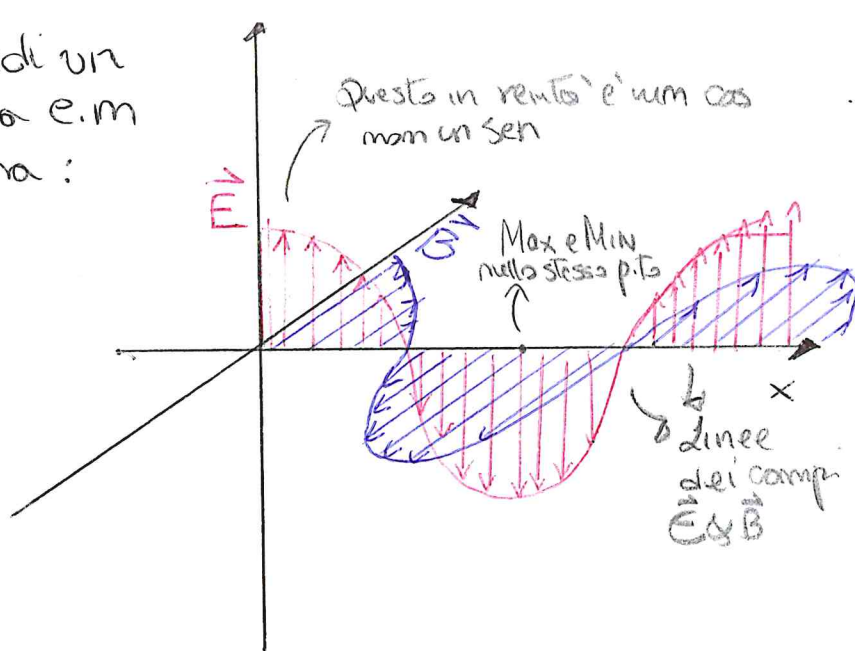
$\Rightarrow$ Il prodotto vettoriale:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{v} (E_y^2 + E_z^2) \hat{u}_x =$$

$$= \frac{E^2}{v} \hat{u}_x = \underset{\substack{\parallel \\ \vec{S} B^2}}{v} B^2 \hat{u}_x = E B \hat{u}_x \Rightarrow \text{da la direzione} \\ \text{ed il verso di} \\ \text{propagazione!}$$

$$\hookrightarrow \text{in quanto } \vec{S} = |\vec{S}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{direzione} \\ \text{propagazione}}}{\hat{u}_x}$$

Quindi un'onda e.m. piana:



- $\vec{E}$ & $\vec{B}$ si propagano con la stessa velocità c (nel vuoto)
- I moduli dei campi, p.to x p.to, ed istanti per istante, sono legati dalla rel. $E = cB$

- $\vec{E}$ & $\vec{B}$ sono $\perp$ tra loro e $\perp$ alla direzione di propagazione (onde trasversali, x cui e' importante concetto di polarizzazione)
- Il verso di propagazione e' quello dato dal prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$

→ Alcune relazioni utili: (che derivano dalle relazioni viste prima)

$s = vt$

$\lambda = cT \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow$ La lunghezza d'onda e la frequenza non sono indipendenti!

$\frac{2\pi}{k} = c \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = ck$

- $c = \omega / k$
 - $c = \lambda \nu$
 - $c = \lambda / T$
- } 3 modi per esprimere la velocità di propagazione