

Potenza solare

Il sole è una sorgente molto intensa di onde elettromagnetiche non polarizzate. Sulla superficie terrestre l'intensità della radiazione solare vale circa $I = 1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$. Dato il grande valore della distanza sole-terra ($r \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$) possiamo considerare paralleli i fasci luminosi e quindi localmente piane le onde incidenti. Le ampiezze dei campi elettrico e magnetico E e B sulla superficie terrestre risultano:

$$* E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = 1.03 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.43 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

$$* I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

La pressione della radiazione solare su un oggetto, in base a (10.34) e (10.35), vale

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}, \quad P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = 9.34 \cdot 10^{-6} \text{ Pa},$$

rispettivamente per un corpo assorbente e per un corpo riflettente. Si tratta di valori inferiori di circa 11 ordini di grandezza rispetto alla pressione atmosferica, $p_{\text{atm}} \approx 10^5 \text{ Pa}$.

Se immaginiamo che l'intensità misurata sulla superficie terrestre sia distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio $r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, abbiamo una stima della potenza della sorgente solare, detta anche luminosità del sole:

$$\mathcal{P}_{\text{sole}} = I 4\pi r^2 = 3.96 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

Sorgente dell'energia solare sono i processi di fusione nucleare che avvengono all'interno del sole. Si ritiene che il processo principale sia la fusione di quattro nuclei di idrogeno in un nucleo di elio attraverso una catena di reazioni successive. La differenza di massa tra stato iniziale e stato finale è

$$\Delta m = 4 m_{\text{H}} - m_{\text{He}} = 4 \cdot 1.6726 \cdot 10^{-27} - 6.6420 \cdot 10^{-27} = 0.0484 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

e a questa corrisponde l'energia liberata

$$\Delta U = \Delta m c^2 = 4.356 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 27.3 \text{ MeV}.$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La temperatura all'interno del sole, costituito principalmente da idrogeno, è di circa $1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$; l'energia del moto di agitazione termica dei nuclei di idrogeno è tale da permettere a questi di superare la repulsione elettrica e di avvicinarsi talmente tra loro da risentire della forza nucleare attrattiva, causa della fusione nucleare.

L'energia liberata dalla fusione compare sotto forma di energia cinetica delle particelle che vengono emesse durante le reazioni (tra cui neutrini) e di energia elettromagnetica; essa è in massima parte riassorbita dal mezzo circostante. L'insieme di tutti i processi consente una situazione di equilibrio dinamico, con un flusso di energia dall'interno verso la superficie del sole, che si trova a circa $6 \cdot 10^3 \text{ K}$, temperatura troppo bassa perché avvengano processi di fusione. La radiazione che noi riceviamo è emessa dagli atomi degli strati superficiali del sole, eccitati tramite urti termici. * $\rightarrow$ Vedi dopo

Una stima del numero di fusioni al secondo necessarie per generare la potenza emessa è

$$n_f = \frac{\mathcal{P}_{\text{sole}}}{\Delta U} = \frac{3.96 \cdot 10^{26}}{4.36 \cdot 10^{-12}} = 9.1 \cdot 10^{37} \text{ fusioni/s}$$

e in un secondo viene consumata una massa di idrogeno pari a

$$M_{\text{H}} = 4 m_{\text{H}} n_f = 6.1 \cdot 10^{11} \text{ kg/s},$$

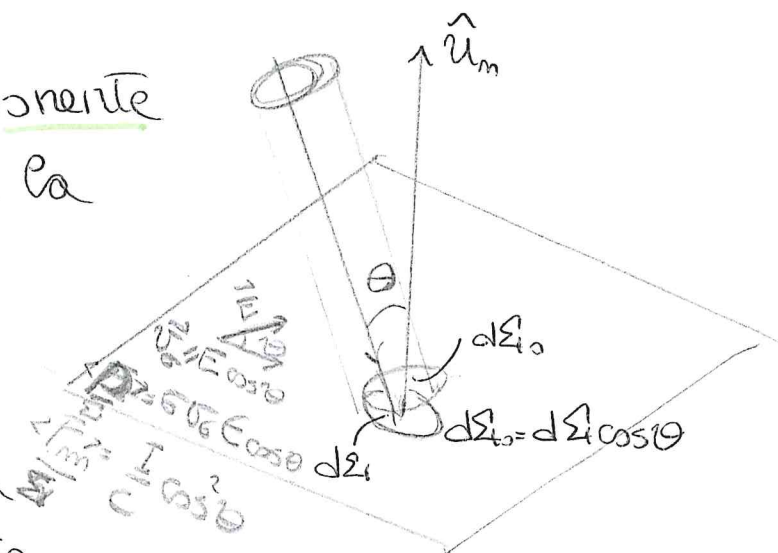
ovvero in un anno $1.9 \cdot 10^{19} \text{ kg}$ ($\sim 1/10$ di Plutone). La massa del sole è $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; per consumarne metà, cioè per consumarne $1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, occorrono $\approx 5 \cdot 10^{10}$ anni

$\downarrow$ $\rightarrow$ Eta Universo $\sim 13 \text{ byr}$
In verità, l'evoluzione di una stella come il sole, segue un'alta traiettoria dopo $\sim 10^{10} \text{ yr}$

rad. corpo Nero

Infine consideriamo un'onda piana che incide con un angolo θ rispetto alla superficie.

In questo caso la componente dell'onda che fornisce la variazione di q.d.m è quella normale alla superficie (che comporta un fattore $\cos\theta$), inoltre



l'area colpita dall'onda, a parità di sezione d'onda incidente, è maggiore di $\cos\theta$. Si ha quindi in definitiva:

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} \cos^2\theta \quad \text{se Assorbimento Completo}$$

$$P_{\text{rad}} = 2 \frac{I}{c} \cos^2\theta \quad \text{se Riflessione Completa}$$

L'intensità di radiazione è:

$$I = I_0 \cos\theta \quad (\text{Legge di Lambert})$$

Asse Terrestre inclinato 23.5°
(e longitudinale) dell'asse T

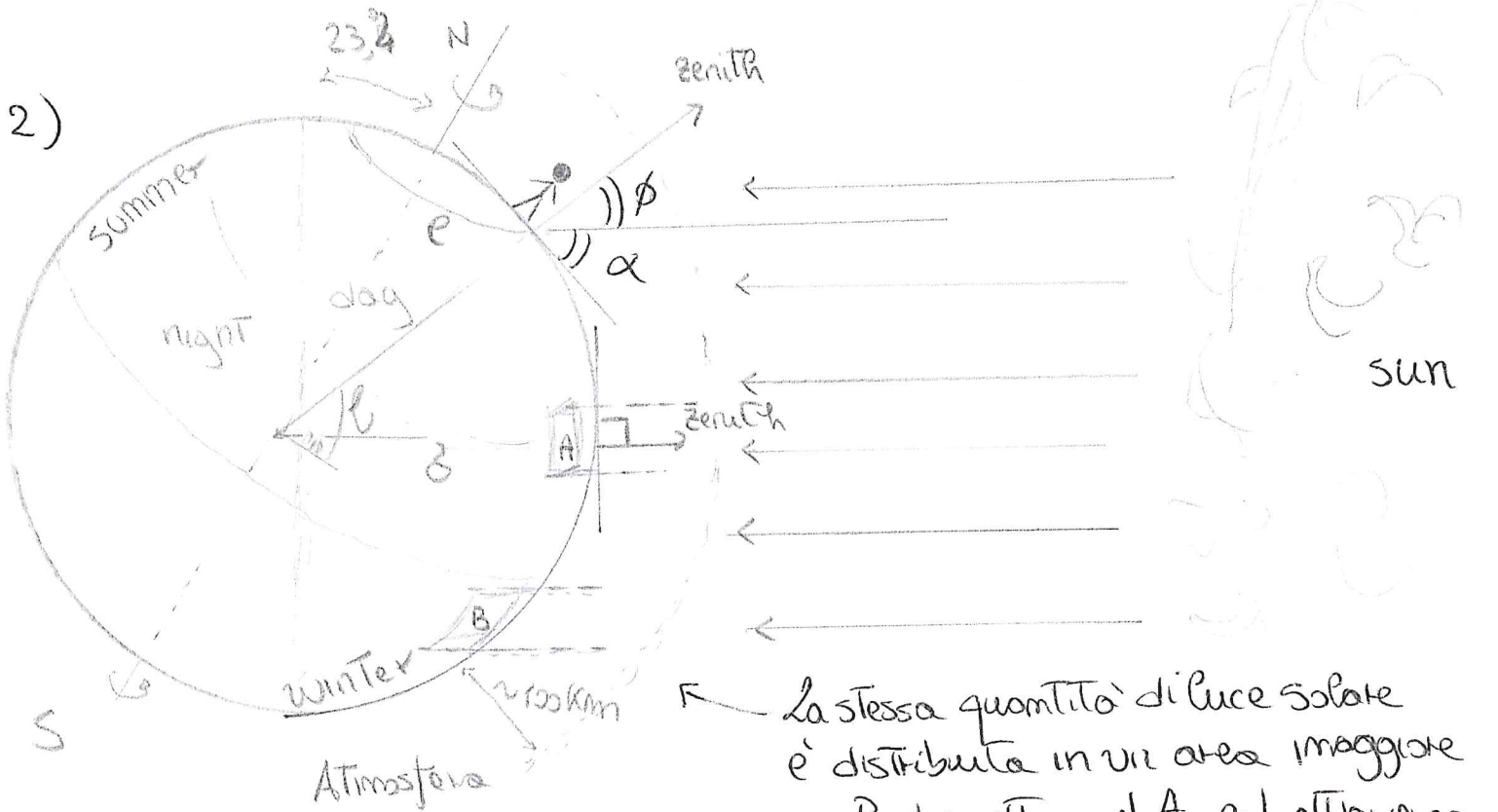
Questo spiega la variazione stagionale del flusso di radiazione che colpisce la superficie terrestre dipende dall'inclinazione con cui i raggi solari la raggiungono. Queste relazioni ci dicono anche come orientare in modo ottimale i pannelli solari.

* Infatti

$$I = \langle \underline{P} \rangle = \langle \underline{S} \rangle \cdot d\vec{\Sigma} = \underline{I}_0 d\vec{\Sigma} = I_0 \cos\theta \quad \text{con } I_0 \text{ intensità onda incidente}$$

→ l'et di 23,5 dell'asse Terrestre rispetto all'eclittica incide in 3 modi alla quantità di radiazione ricevuta da una particolare località:

- 1 - Durata del giorno
- 2 - Angolo di incidenza della radiazione solare
- 3 - Spessore dello strato d'atmosfera attraversato dai raggi (vedi dopo "finestra Atmosferica")



Angolo incidenza: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$
rispetto all'orizzante
 $\phi = \epsilon - \delta$

→ Solar Zenith Angle (posizione apparente del sole a mezzogiorno)

$$= \frac{\pi}{2} - \phi + \delta$$

$$\delta = 23,45 \text{ km} \left(360 \frac{284+m}{365} \right)^{90+m} \leftarrow$$

↪ declinazione solare, ovvero
la latitudine dei luoghi in
cui, in un dato giorno, il
sole è alto zenith a mezzogiorno
(e.g. 21 giugno, Solstizio d'estate
è il Tropico del cancro, $23^{\circ}27'$)

La variazione dell'angolo di incidenza tra i due solstizi: $\Delta\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon + \delta_{\text{sum}}^{21/06}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon + \delta_{\text{min}}^{21/12}\right) \approx 46,5$

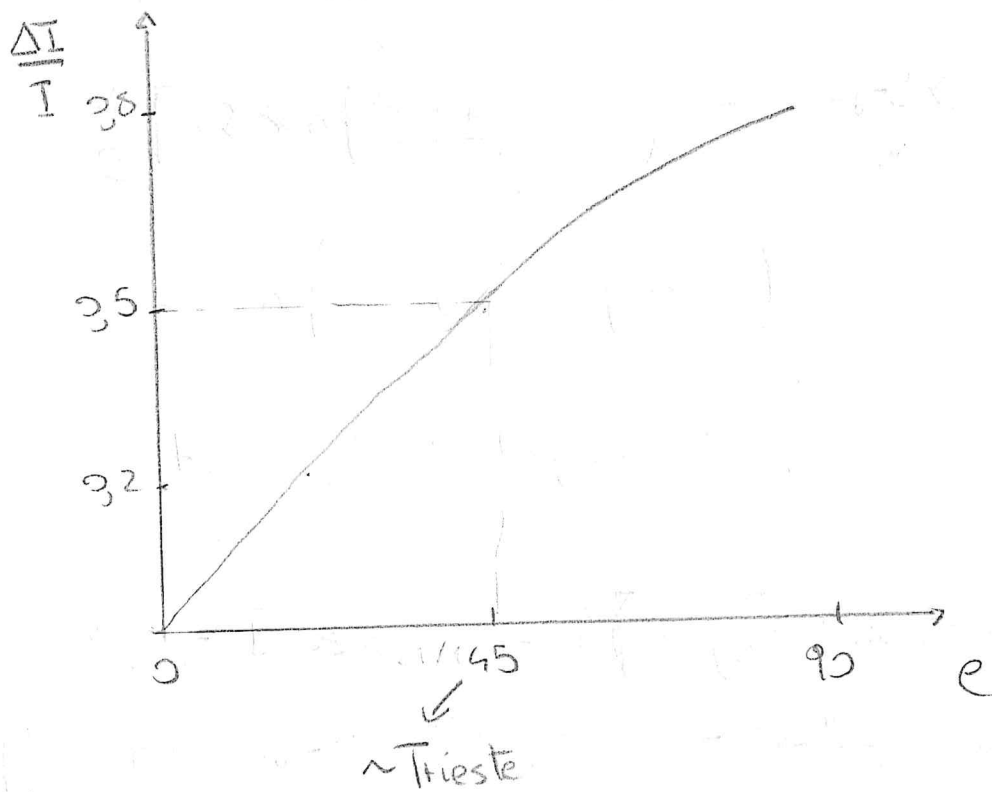
$\downarrow$ $23^\circ 27'$ $\downarrow$ $-23^\circ 24'$

Variazione irradiamento ricevuta tra i 2 solstizi:

$$\Delta I = I \left(\cos^2 \phi_{21/06} - \cos^2 \phi_{21/12} \right) = I \left(\cos^2(\epsilon - \delta_{\text{sum}}) - \cos^2(\epsilon - \delta_{\text{min}}) \right)$$

$\swarrow$ Angolo raggi rispetto alla normale: $\epsilon - \delta$

$\sim$ Trieste $\epsilon \approx 45^\circ \approx -0,7$



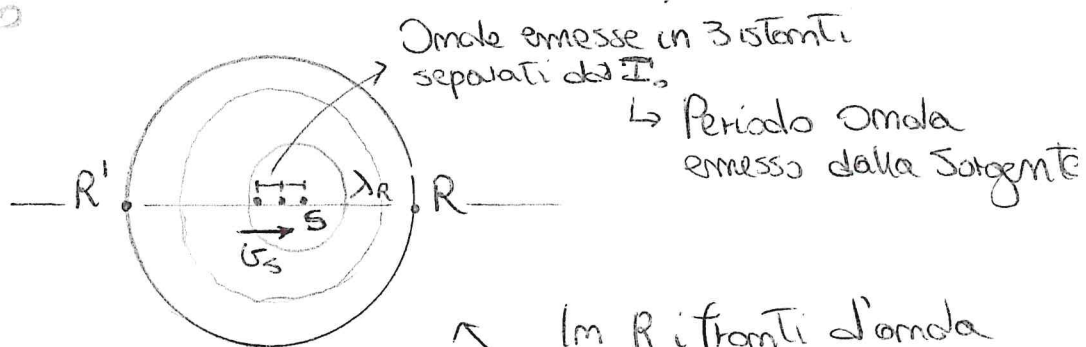
• Effetto Doppler (onde e.m.)

→ Per onde meccaniche è legato al fatto che la velocità di propagazione dipende dal sistema di riferimento; f.e.g. la sorgente è in moto relativo rispetto al ricevitore con velocità $\vec{v}_s$ (minore della velocità di propagazione v)

• Se sorgente in moto

di fronti d'onda
mat. ricevuti da R

$$N = \frac{v \Delta t}{\lambda_R} \Rightarrow v_R = \frac{N}{\Delta t}$$



Im R i fronti d'onda sono più vicini di quanto la sorgente è ferma:

lunghezza d'onda emessa
 v/v_0

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_s T_0 = \frac{v}{v_0} - \frac{v_s}{v_0}$$

$$* v_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{v - v_s} v_0$$

Se invece è R a muoversi con velocità v_R , la distanza tra i fronti d'onda rimane λ_0 , però il # di fronti d'onda che in restano il ricevitore in Δt è: $N = \frac{(v - v_R) \Delta t}{\lambda_0} \Rightarrow v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v - v_R}{v} v_0$

In definitiva:

$$v_R = \frac{v - v_R}{v - v_s} v_0 \Rightarrow$$

Per un'onda che si propaga in un mezzo l'effetto Doppler non è simmetrico se a muoversi è R o S

→ Per le onde elettromagnetiche è corretto di velocità rispetto al mezzo perché di significato in quanto possono propagarsi nel vuoto. Inoltre, per la relatività ristretta, la velocità delle onde em nel vuoto è sempre c , in qualsiasi sistema di riferimento!

Dunque l'effetto Doppler deve essere SIMMETRICO (ovvero uguale se si muoversi e' S o R, e' unica variabile e' la velocità relativa tra i due).

Utilizzando le equazioni della relatività ristretta - in cui si trasforma da un sistema di riferimento all'altro c'è anche il tempo - si ottiene:

$$v_R = \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_0 \quad \& \quad \lambda_R = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm \frac{v}{c}} \lambda_0$$

↑ velocità relativa tra S & R

Questo effetto è utilizzato in Astrofisica per studiare la velocità di allontanamento delle galassie, nota λ_0 per elementi chimici in laboratorio:

$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 + 1}$$

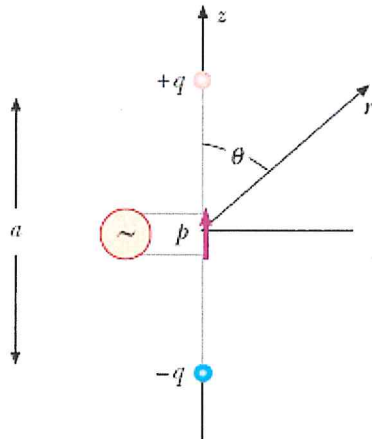
Sorgenti di Onde Elettromagnetiche

Cariche elettriche accelerate (varia modulo e/o direzione o velocità)
 ovvero Corrente variabile nel tempo

Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante

Lo studio della radiazione di dipolo elettrico è particolarmente importante in quanto su di essa è basato il funzionamento delle antenne utilizzate per le trasmissioni di onde EM.

In Figura è schematizzata un'antenna di lunghezza a : l'oscillazione persistente degli elettroni al suo interno è prodotta da una tensione alternata applicata.



Dal punto di vista elettrico il sistema viene schematizzato come un dipolo elettrico oscillante: la carica q è concentrata agli estremi (le due sferette in Figura) e un opportuno generatore la fa variare sinusoidalmente:

$q = q_0 \sin \omega t \rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$

$p = \text{carica} \times \text{distanza}$

essendo i la corrente elettrica che percorre l'antenna. Si genera così un momento di dipolo elettrico oscillante:

Carica ad 1 estremità

$p = q a u_z = q_0 a \sin \omega t u_z = p_0 \sin \omega t u_z, \quad p_0 = q_0 a = \frac{i_0 a}{\omega}$

Momento di dipolo massimo

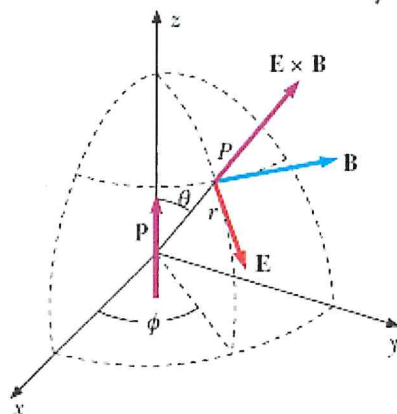
parallelo all'antenna stessa ovvero all'asse z di Figura..

Si dimostra che, a grandi distanze dal dipolo $r \gg a$, lungo una qualsiasi direzione individuata da un vettore r che parte dal centro del dipolo e forma un angolo θ con p , si propaga un'onda elettromagnetica trasversale. Come si vede in Figura ~~10.22~~, il campo elettrico E , ortogonale a r , sta in un piano meridiano mentre il campo magnetico B , ortogonale a r e ad E , sta in un piano parallelo; come già anticipato, in ogni istante $\vec{E} \times \vec{B}$ dà la direzione e il verso di propagazione dell'onda. I moduli dei campi E e B sono dati da:

Moduli campi E & B generati da dipolo oscillante:

N.B. Valida solo a grandi distanze $r \gg \lambda \gg \lambda$

$$E = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t) \quad , \quad B = E/c$$



dependenza
come onda sferica

Schermata dei campi E & B
emessi da un dipolo elettrico
oscillante

In prossimità del
dipolo $E \propto 1/r^3$

La dipendenza da $1/r$ è tipica dell'onda sferica. La velocità di propagazione è $c = \omega/k$. I valori dei campi dipendono, oltre che dalla distanza r , dall'angolo θ e sono nulli in particolare per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, cioè lungo l'asse del dipolo. Il problema è a simmetria cilindrica intorno all'asse z del dipolo.

o vero punto d'antenna

Per discutere almeno qualitativamente la formazione delle onde elettromagnetiche riporto in figura la configurazione delle linee del campo elettrico prodotto dal dipolo, assumendo come istante iniziale t , (a), quello in cui il momento di dipolo vale $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_z$ e le linee di E hanno l'andamento tipico di un dipolo elettrico. All'istante $t + T/4$, (b), il momento di dipolo è nullo per cui non esistono linee di campo elettrico che hanno gli estremi sul dipolo. Fisicamente è successo che le linee di campo elettrico create nell'intervallo $T/4$ si sono allontanate dal dipolo con velocità c , si sono chiuse su se stesse e hanno continuato ad allontanarsi. Intanto si formano nuove linee di campo elettrico con il verso opposto: nell'istante $t + T/2$, (c), il momento di dipolo elettrico vale $-p_0 \mathbf{u}_z$; all'istante $t + 3T/4$, (d), il momento di dipolo elettrico è nuovamente nullo e quindi anche questo sistema di linee di campo elettrico si chiude e si allontana, deformando le linee di campo elettrico formate in precedenza. Dopo un periodo, istante $t + T$, (e), le linee di campo elettrico nell'intorno del dipolo elettrico sono le stesse dell'istante t , mentre il sistema di linee di campo elettrico formate in precedenza si è ulteriormente allontanato. Il processo si ripete ciclicamente producendo la configurazione di linee di campo elettrico mostrata, per i primi due periodi (f).

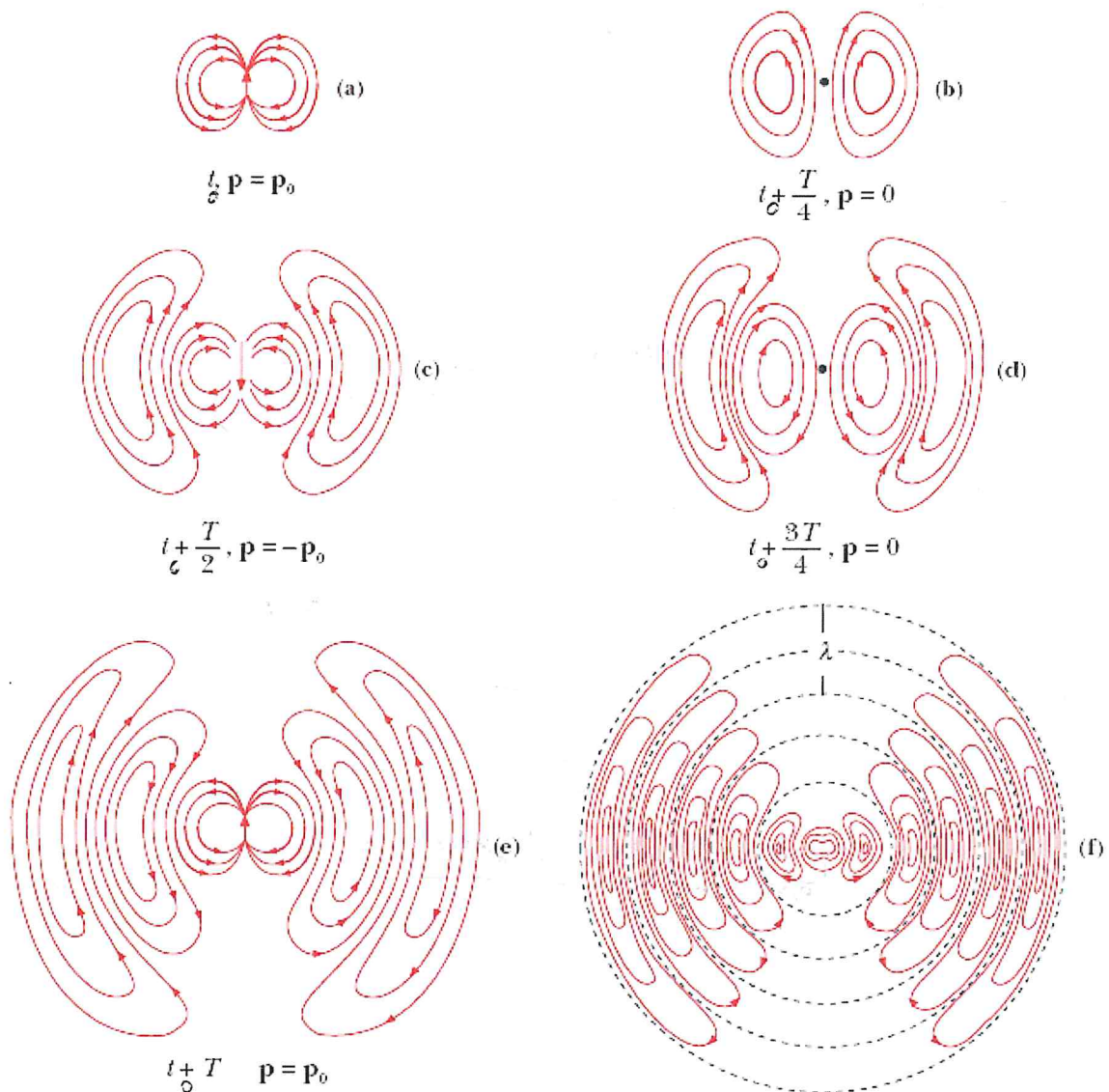
$$\vec{p} = p_0 \sin \omega t \hat{u}_z \quad \text{set } T_0 = \frac{T}{4} \quad \text{such that } \vec{p}(t_0) = p_0 \sin \frac{2\pi T}{T_4} \hat{u}_z$$

$$\text{per } t = t_0 + \frac{T}{4} = \frac{T}{2} \rightarrow p(t) = 0$$

$$\text{per } t = t_0 + \frac{T}{2} = \frac{3}{4}T \rightarrow p(t) = p_0 \sin \frac{3}{2}\pi = -p_0$$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$t_0 = \frac{T}{4} \Rightarrow \sin \omega t_0 = 1$$



Rappresentazione schematica della produzione e della propagazione, in tempi diversi, delle linee di campo elettrico prodotte da un dipolo elettrico oscillante.

Il campo magnetico **B** associato al campo elettrico **E** risulta, in Figura, in ogni punto perpendicolare al foglio. Le linee del campo magnetico sono quindi circonferenze che hanno il centro sull'asse del dipolo **p** e il cui raggio aumenta progressivamente man mano che l'onda elettromagnetica si allontana dalla sorgente (proprio come le onde circolari che si propagano sulla superficie dell'acqua).

L'intensità dell'onda elettromagnetica emessa dal dipolo elettrico oscillante si calcola dall'equazione per E:

$$E_0 = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2} \omega^2$$

$$I(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2 \theta$$

$$I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \pi^2 \nu^4}{2\epsilon_0 c^3}$$

Intensità
dipolo
Oscillante
($r \gg a \gg \lambda$)

Essa dipende da $1/r^2$, come richiesto per un'onda sferica, e da $\sin^2 \theta$: l'intensità irradiata da un dipolo elettrico oscillante è nulla lungo l'asse ed è massima nel piano equatoriale, dove vale

$$I_{\max} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{I_0}{r^2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

Il termine costante I_0 dipende soltanto dalle caratteristiche della sorgente; si noti la dipendenza da ω^4 (ν^4)

$$I = I_0 \sin^2 \theta$$

In Figura è rappresentato in un diagramma polare la funzione $I(\theta)$: con r fissato, per ogni valore di θ si riporta dal centro del dipolo un segmento di lunghezza proporzionale a $I(\theta)$. Le punte dei segmenti stanno sulla curva disegnata, avente simmetria cilindrica rispetto all'asse del dipolo. Si dice che il dipolo elettrico presenta un diagramma di intensità con due lobi. È questo un esempio di fronte d'onda sferica con intensità non uniforme sul fronte d'onda.

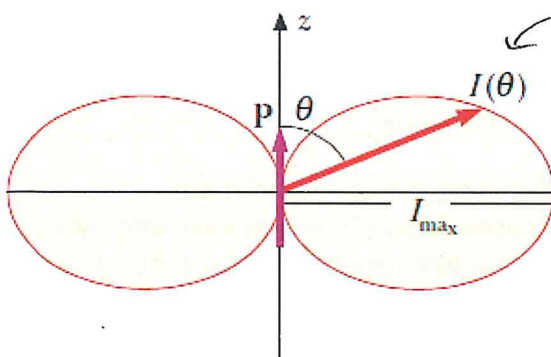
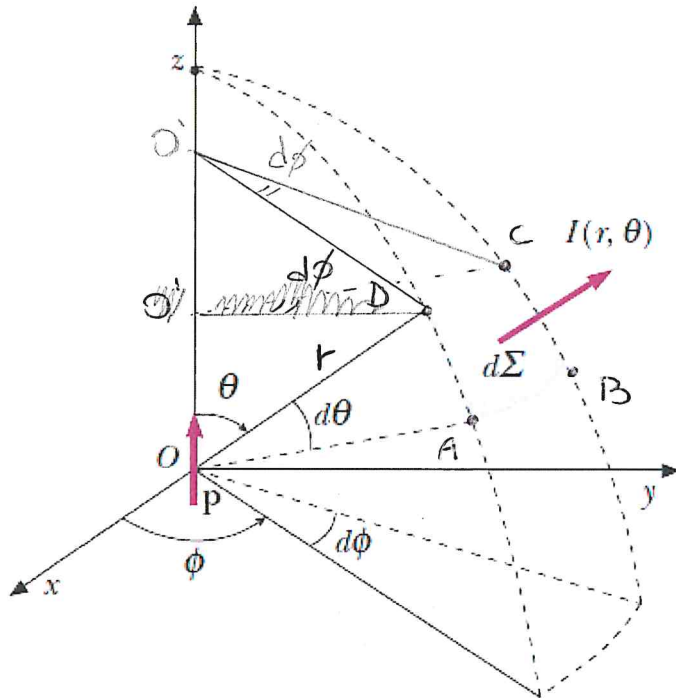


Diagramma d'intensità
di un dipolo con i 2
caratteristici lobi

Diagramma polare dell'intensità dell'onda elettromagnetica emessa da un dipolo elettrico oscillante.

La potenza emessa dal dipolo elettrico oscillante si ottiene integrando sulla superficie sferica:

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} I(\theta) d\Sigma ,$$



$$d\Sigma = (\overline{AB})(\overline{AD}) = \\ = (\underbrace{r \sin \theta}_{O'D} d\phi) (r d\theta)$$

dove l'integrale è esteso ad una superficie sferica Σ di raggio $r \gg \lambda \gg a$ con centro nel dipolo stesso; l'elemento di superficie sferica in coordinate polari, è $d\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ per cui

Tenuto conto che

$$\mathcal{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta .$$

Tenuto conto che

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{4}{3} ,$$

risulta in conclusione

$$\mathcal{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{4\pi^3 p_0^2 \nu^4}{3\epsilon_0 c^3} = \frac{8\pi}{3} I_0 \quad .$$

Fissato il valore di p_0 , anche la potenza irradiata dipende dalla quarta potenza della pulsazione ω , ovvero della frequenza ν .

Radiatione emessa da una carica elettrica in moto: accelerato.

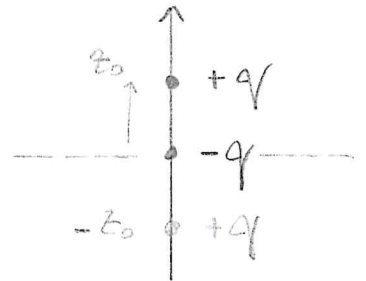
Una carica elettrica in moto ^{Superficie} accelerato irradia onde elettromagnetiche. Infatti una carica in moto è assimilabile ad una corrente $I = eAv$, che quindi produce un campo B (legge di Ampere-Maxwell). Se accelerata il campo B sarà variabile nel tempo, e quindi per le equazioni di Maxwell produrrà un campo elettrico (legge di Faraday); a sua volta un campo elettrico variabile mi genera un campo magnetico, e così via. Questo dà luogo alla propagazione di un'onda EM.

Riscriviamo la potenza irradiata in funzione dell'accelerazione. Un dipolo elettrico oscillante può essere rappresentato anche con una carica $-q$ fissa nell'origine e una carica $+q$ che si muove lungo l'asse z con legge $z = z_0 \sin \omega t$, che oscilla cioè con moto armonico tra $+z_0$ e $-z_0$. L'accelerazione della carica $+q$ e il valor medio del suo quadrato sono rispettivamente:

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t, \quad a_m^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\omega^4 z_0^2 \sin^2 \omega t'}_{a(t)^2} dt' = \frac{\omega^4 z_0^2}{2}.$$

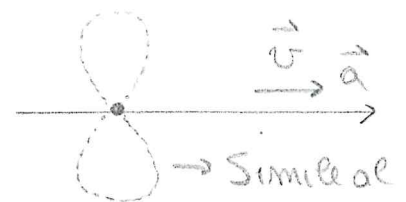
Il valore massimo del momento di dipolo è:

$$p_0 = qz_0 \Rightarrow p_0^2 \omega^4 = q^2 z_0^2 \omega^4 = 2q^2 a_m^2; \quad \omega^4 = 2\alpha_{em}^2 / z_0$$



Che in base alla formula della potenza irradiata da un dipolo risulta:

*)
$$P_{Larm} = \frac{q^2 a_m^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$
 Formula di Larmor $\hookrightarrow P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$



è nota come formula di Larmor e non è relativistica, ovvero è valida per velocità della particella $\ll c$. L'emissione è nulla lungo la direzione del moto (come nel dipolo), e avviene preferenzialmente in direzione perpendicolare al moto.

Nota: Nel modello di Bohr l'elettrone dell'atomo di idrogeno compie un'orbita circolare di raggio $r = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Da semplici considerazioni classiche (Forza centripeta = Forza di Coulomb) si ricava una velocità orbitale di $2.19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ ed un'accelerazione $a = v^2/r = 9.02 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$.

Secondo la formula di Larmor dunque l'elettrone perderebbe per irraggiamento un'energia pari a $2.88 \cdot 10^{11} \text{ eV/s}$, ovvero dissiperebbe la sua energia di legame (13.6 eV) in $\sim 4.5 \cdot 10^{-11} \text{ s}$, ovvero secondo la fisica classica l'atomo non potrebbe essere stabile! L'incongruenza si risolve

*) Una derivazione più rigorosa richiede di calcolare il campo e.m. dai potenziali scalari (V) e vettoriali (A)

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad B = \nabla \times A \quad \text{con} \quad \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$