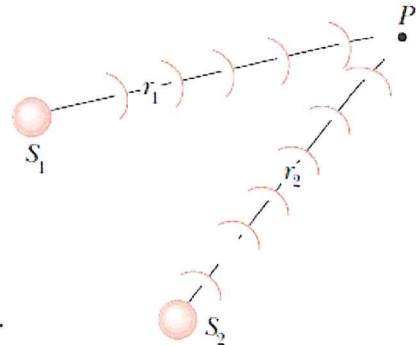


Fenomeni di interferenza:

Il fenomeno di interferenza, dipende dal principio di sovrapposizione – basta sulla linearità dell'equazione di d'Alembert –, il quale afferma che quando due o più onde che viaggiano si combinano in un dato punto, l'ampiezza dell'onda in quel punto è la somma delle ampiezze delle singole onde. Assumendo che le onde siano armoniche e che abbiano la stessa frequenza, vedremo che le caratteristiche della sovrapposizione dipendono dalla posizione rispetto alle sorgenti, dalla direzione di vibrazione delle onde e dalla differenza di fase delle stesse.



Per fissare le idee, nel caso in cui le onde scalari, indipendentemente dalla loro forma, piana, sferica, cilindrica, siano emesse da due sorgenti S_1 e S_2 , e che l'osservazione avvenga in un certo punto P, esse sono rappresentate in P da:

$$\xi_1 = A_1 \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \quad \xi_2 = A_2 \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) ,$$

dove A_1 e A_2 sono le ampiezze delle onde rispettivamente a distanza r_1 e r_2 da S_1 e S_2 , il termine $kr_i - \omega t$ descrive la propagazione dell'onda verso il punto P e ϕ_i è la fase a cui è emessa l'onda dalla sorgente S_i . La differenza di fase tra le due onde è:

$$\delta = (kr_1 - \omega t + \phi_1) - (kr_2 - \omega t + \phi_2) = \underbrace{k(r_2 - r_1)}_{\text{differenza percorso}} + \underbrace{(\phi_1 - \phi_2)}_{\text{differenza intrinseca}} ;$$

Differenza di Fase Tra le onde

essa contiene due contributi: una differenza di fase intrinseca ($\phi_1 - \phi_2$) e una differenza di fase $k(r_2 - r_1)$, dovuta all'eventuale differenza nel percorso di ciascuna onda per andare in P, che può a sua volta dipendere anche dalla natura fisica dei mezzi attraversati. Quando la differenza di fase tra due onde in qualsiasi punto P è costante nel tempo, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \text{costante}$, le sorgenti delle due onde si dicono **coerenti**. In particolare se $\Delta\phi = 0$ le due sorgenti si dicono **sincrone**. Quando invece questa circostanza non si verifica, ovvero si verifica per tempi molto brevi rispetto all'intervallo di tempo necessario all'osservazione, le sorgenti si dicono **incoerenti**.

Il termine **interferenza** è riferito propriamente a quei fenomeni di sovrapposizione ottenuti con onde emesse da due o più sorgenti coerenti. A seconda della differenza di fase che hanno due onde che si sovrappongono in punto, daranno luogo ad una interferenza costruttiva o distruttiva. La possibilità di produrre interferenza è una caratteristica generale delle grandezze che si propagano per onde; ne è conferma il fatto che l'interferenza si verifica con ogni tipo di onda e che la trattazione analitica è indipendente dalla natura delle onde in esame.

Si noti che per due onde coerenti la differenza di fase δ non dipende dal tempo, di conseguenza l'ampiezza e l'intensità dell'onda risultante hanno un valore costante nel tempo che dipende solo dalla distanza del punto P dalle sorgenti. L'interferenza cioè è un fenomeno stazionario, funzione della posizione del punto, ma non del tempo.

Se costanti le onde sono coerenti

↓
Possiamo fare interferenza

↓
Fenomeno Stazionario

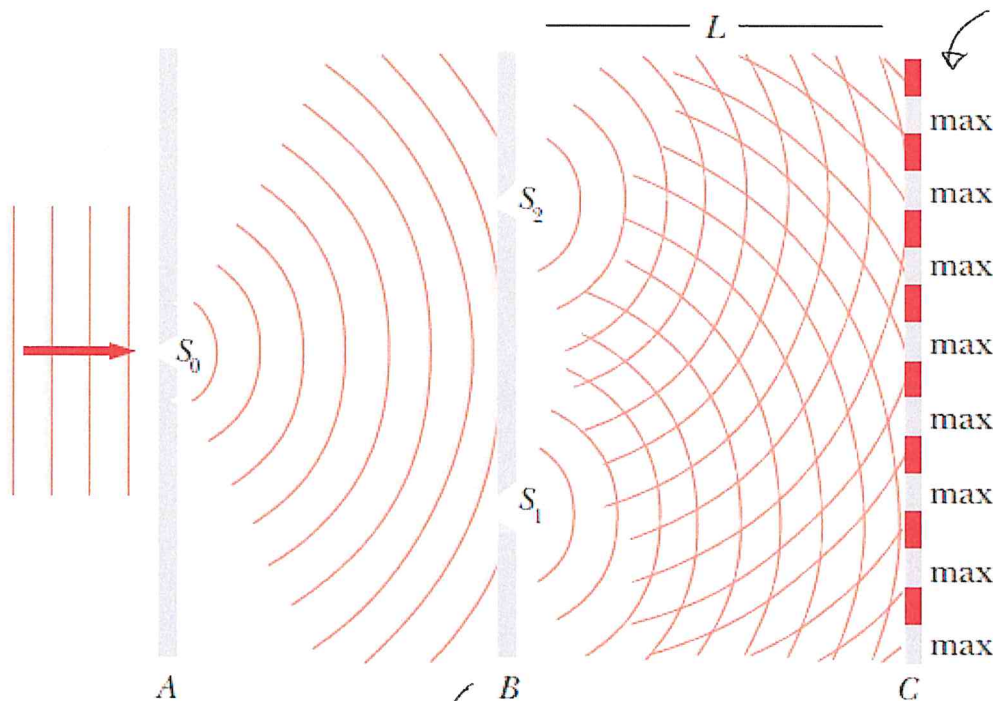
↓
Dipende dal punto, ma non dal tempo

Interferenza prodotta da due sorgenti: Esperimenti di Young

P. di H-F

Nell'esperimento sull'interferenza di Young (1801) la luce monocromatica viene diffratta dalla fenditura S_0 , che si comporta così come una sorgente puntiforme di luce che emette fronti d'onda semicircolari. La luce incontra poi le fenditure S_1 ed S_2 sullo schermo B, che agiscono quindi come due sorgenti puntiformi di luce aventi la stessa pulsazione, e sincrone (ovvero le onde emergenti dalle due fenditure sono in fase tra loro; se le onde non fossero coerenti, ovvero la differenza di fase non fosse costante nel tempo, non potremmo osservare nessuna interferenza). La luce diffratta da queste due fenditure si sovrappone nella zona tra lo schermo B e lo schermo di osservazione C posto a distanza L , producendo una figura d'interferenza sullo schermo C, che consiste di una serie di bande parallele chiare e scure chiamate frange. Quando la luce dalle fenditure S_1 e S_2 arriva su un punto dello schermo tale che in quella posizione si abbia interferenza costruttiva, appare una frangia chiara. Quando invece la luce proveniente dalle due fenditure si combina in modo da produrre un'interferenza distruttiva in una certa posizione sullo schermo, allora si ha una frangia scura.

La presenza di un'interferenza costruttiva o distruttiva in punto dello schermo è dovuta alla differenza di fase con cui le onde raggiungono lo schermo in quel punto; la differenza di fase a sua volta è dovuta alla diversa lunghezza percorsa dalle onde (inizialmente in fase) per raggiungere il punto (vedi figura).



Frangie di interferenza dovute alla differenza di fase (dovuta al differente percorso) dell'onde che raggiungono il punto

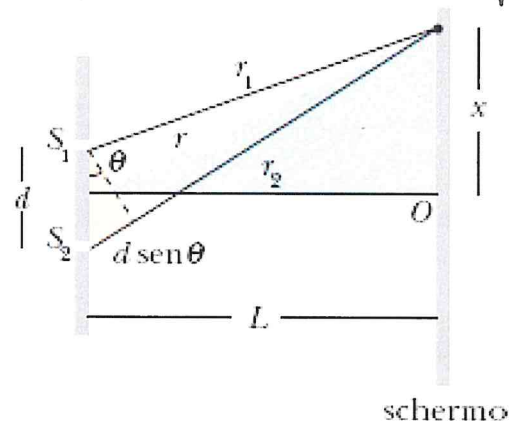
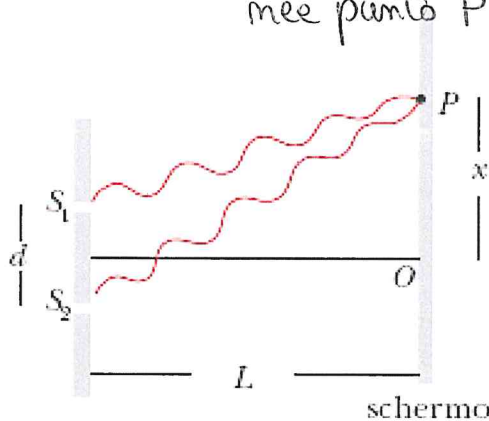
S_1 & S_2 sorgenti p.tiformi di onde SINCRONE ($\Delta\phi=0$)

Per vedere come avviene la formazione delle frange chiare e scure e per determinare la loro posizione sullo schermo C, indichiamo con:

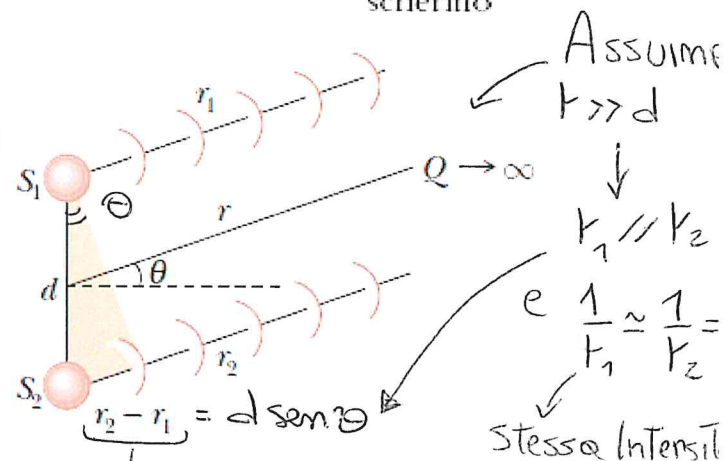
$$E_1 = \frac{E_0}{r_1} \sin(kr_1 - \omega t) \quad , \quad E_2 = \frac{E_0}{r_2} \sin(kr_2 - \omega t) \quad \leftarrow \text{Onde sferiche prodotte da sorgenti } S_1 \text{ e } S_2$$

l'effetto prodotto dalle singole sorgenti S_1 e S_2 nel punto di sovrapposizione P in funzione del tempo. La differenza di fase tra le due onde è:

→ $\delta = k(r_2 - r_1)$, Diff. di Fase Onde (dovuta a differenza percorso) nel punto P



Nell'ipotesi, verificata nell'esperimento di Young, che il punto P si trovi a distanza r dal punto medio tra S_1 e S_2 molto maggiore della separazione d tra S_1 e S_2 ($r \gg d$), abbiamo che $1/r_1 \approx 1/r_2 \approx 1/r$ (ovvero le intensità delle due onde sono uguali), e le due direzioni di propagazione si possono ritenere parallele per cui $r_2 - r_1 = d \sin \theta$ e le relazioni precedenti diventano:

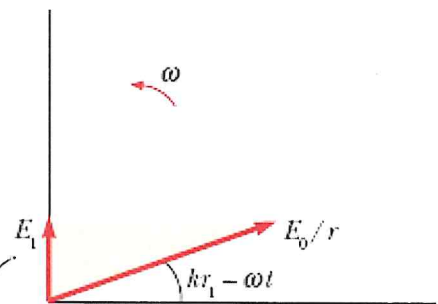


$$E_1 = \frac{E_0}{r} \sin(kr_1 - \omega t) \quad , \quad E_2 = \frac{E_0}{r} \sin(kr_2 - \omega t) \quad , \quad \delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

avendo utilizzato la definizione di numero d'onde $k = 2\pi/\lambda$.

Per calcolare il campo elettrico risultante in P utilizziamo il metodo dei vettori rotanti o dei fasori.

e consideriamo l'onda armonica $E = E_0/r \sin(kr - \omega t)$, essa può essere rappresentata simbolicamente da un vettore, fasore, di modulo E_0/r che ruota intorno all'origine con velocità angolare ω . La proiezione del fasore sull'asse verticale dà, istante per istante, il valore $E_1(t)$.



la proiezione sull'asse y dà il valore del campo in P, istante per istante
 $E_1 = E_0 \sin(kr_1 - \omega t)$

Rappresentiamo ora le due onde che si sovrappongono in P come due fasori aventi lo stesso modulo E_0/r , formanti un angolo δ , pari proprio alla differenza di fase. L'ampiezza del campo elettrico risultante in P, in base al teorema di Carnot, è:

$$E_{p,\delta} = \left[\left(\frac{E_0}{r} \right)^2 + \left(\frac{E_0}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{E_0}{r} \right)^2 \cos \delta \right]^{1/2}$$

$\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$

Ovvero:

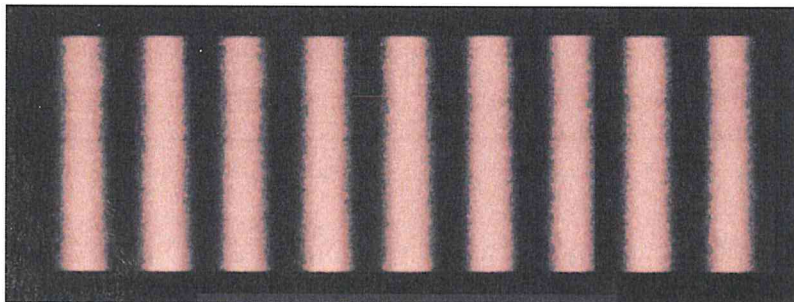
$$E_{p,\delta} = \frac{E_0}{r} \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = \frac{E_0}{r} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\delta}{2}} = 2 \frac{E_0}{r} \cos \frac{\delta}{2} = 2 \frac{E_0}{r} \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

Ricordando che l'intensità di un'onda è direttamente proporzionale al quadrato della sua ampiezza, l'intensità luminosa in P è data da:

$$I_P = 2I_1(1 + \cos \delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad I_P(\theta) = 4I_1 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right), \Rightarrow$$

in cui $I_1 = I_2$ è l'intensità prodotta in P da ciascuna sorgente, quando agisce da sola.

L'intensità, risultata di una media su molti periodi, è costante nel tempo



In Figura è rappresentata la funzione $I_P(\sin \theta)$ al variare del seno dell'angolo θ di osservazione, con l'immagine che si osserva su uno schermo, quando l'esperimento è fatto con luce rossa.

In particolare si osserva un massimo dell'ampiezza $2E_0/r$, e quindi d'intensità $I_P = 4I_1$, nei punti P in cui è verificata la condizione:

$$\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \pm m\pi \Rightarrow \delta = \pm 2m\pi$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2m\pi, \quad d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

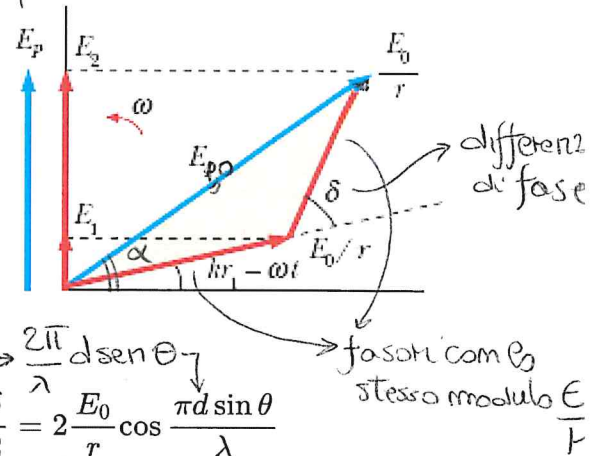
Ovvero se la differenza di cammino è zero oppure un multiplo intero di una lunghezza d'onda, le due onde arriveranno in fase in P e ne risulterà un'interferenza costruttiva.

Nei punti Q in cui si verifica la condizione: $\cos \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \Rightarrow \delta = (2m+1)\pi$

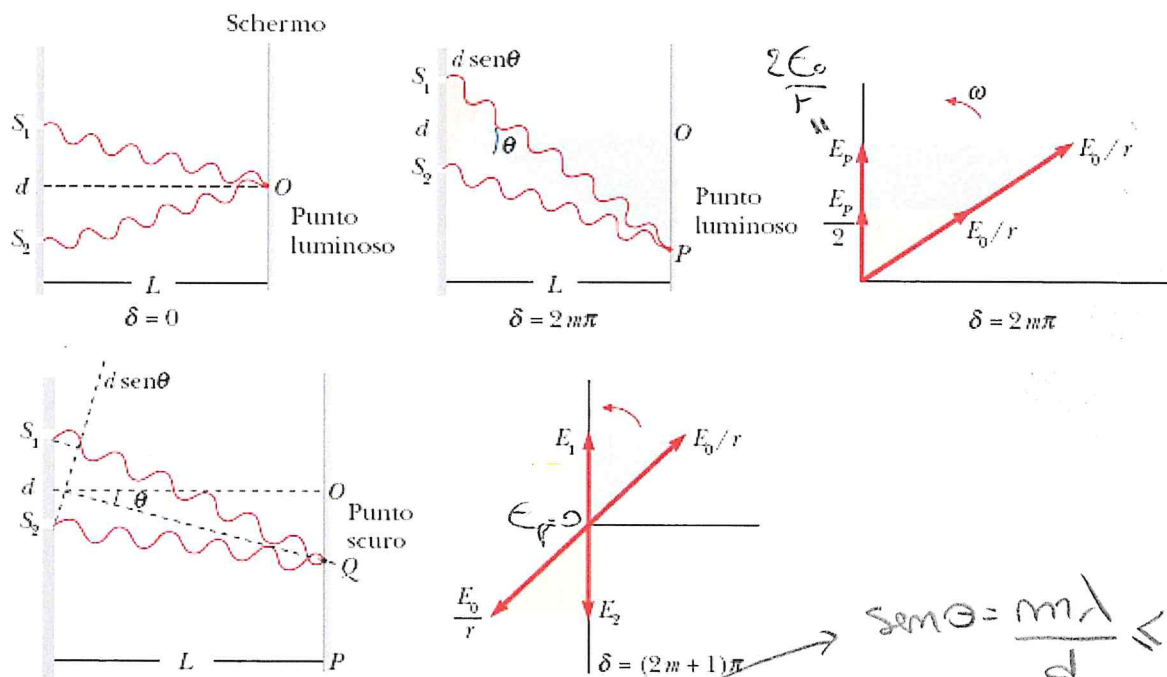
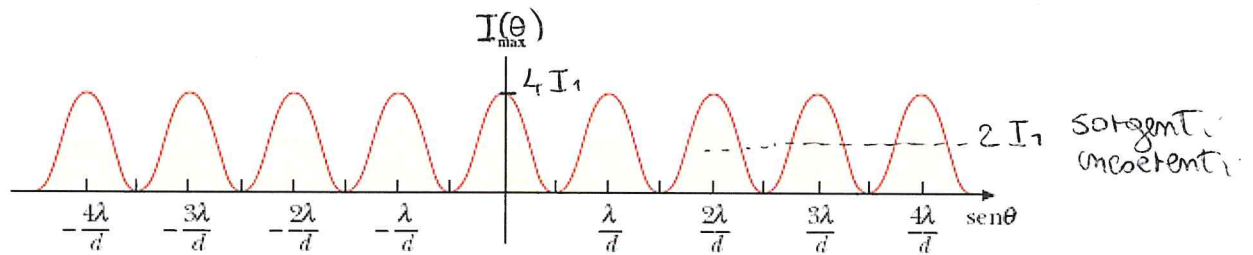
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = (2m+1)\pi, \quad d \sin \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Valore del campo
E totale, istante
per istante nel p.to i

$$E = E_0 \sin \alpha(t)$$



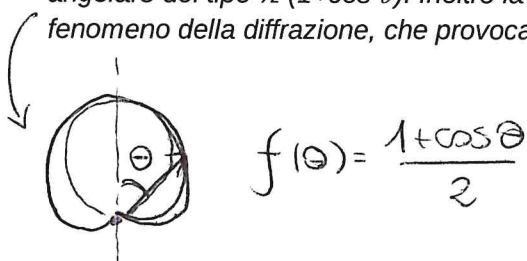
l'ampiezza E_p è nulla e quindi $I_p = 0$. La differenza di percorso è un multiplo semintero di λ , le due onde sono in opposizione di fase e quindi istante per istante si sommano elidendosi; l'interferenza si dice distruttiva.



I valori di m nelle relazioni precedenti non possono crescere indefinitamente: infatti deve essere soddisfatta la condizione $\sin \theta \leq 1$ ovvero $\theta \leq \pi/2$. Se la lunghezza d'onda è minore o eguale alla separazione tra le sorgenti, $\lambda/d \leq 1$, m può assumere, oltre al valore zero che è sempre possibile, almeno un altro valore, ci sono cioè almeno due direzioni di massima intensità; se invece $\lambda > d$ c'è solo il massimo a $\theta = 0$ ($m = 0$). Analogamente, se $\lambda > 2d$ non c'è nessun minimo mentre se $\lambda \leq 2d$ c'è almeno un minimo.

Alcune considerazioni:

La formula per l'intensità fornita sopra, assume che le due fenditure agiscano come sorgenti isotrope mentre nella realtà l'intensità emergente dalle due fenditure ha una dipendenza angolare del tipo $\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$. Inoltre la grandezza finita delle fenditure S_1 e S_2 , dà luogo al fenomeno della diffrazione, che provoca una diminuzione ben più marcata dell'intensità



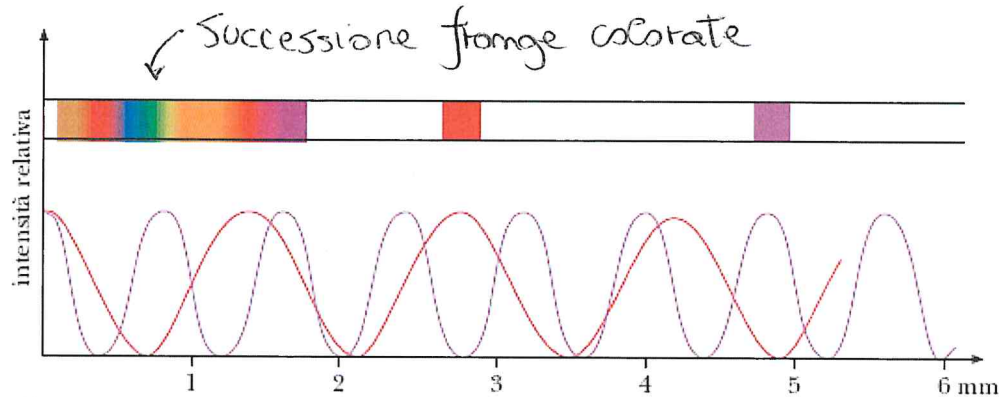
Se $\lambda < d$
 m può essere
 $\neq 0$ (più MAX)
 Se $\lambda \geq d$
 m può essere
 solo $= 0$
 (1 solo MAX)

all'aumentare di θ . Per tali motivi la figura di interferenza effettivamente osservata consiste in un numero limitato di frange nell'intorno dell'asse del sistema $\vartheta = 0$.

Dipendenza da λ :



Se la luce incidente non è monocromatica, le posizioni in cui le diverse lunghezze d'onda sono in fase o opposizione di fase saranno diverse. In particolare se ad incidere è una luce bianca sullo schermo in corrispondenza dell'asse del dispositivo si osserva una frangia bianca ai lati della quale c'è una successione di frange colorate.



Se sorgenti
incoerenti

Se le due sorgenti sono incoerenti nella differenza di fase δ che compare nella definizione di intensità occorre considerare anche la differenza di fase intrinseca $\Delta\phi$ che compare in:

$$I_P = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_1 \cos^2 \left[\frac{k(r_2 - r_1) + \Delta\phi}{2} \right] \rightarrow \text{Varia casualmente nel tempo}$$

Dal momento che $\Delta\phi$ varia casualmente nel tempo, anche δ varia casualmente nel tempo, per cui il valore medio nel tempo di $\cos^2 \delta/2$ è $1/2$ e risulta:

$$I = 2I_1, \Rightarrow \text{Intensità indipendente da } \theta \Rightarrow \text{NO INTERFERENZA}$$

essa non dipende più da δ e risulta in ogni punto eguale alla somma delle intensità prodotte indipendentemente dalle singole sorgenti: con le sorgenti incoerenti non c'è più interferenza.

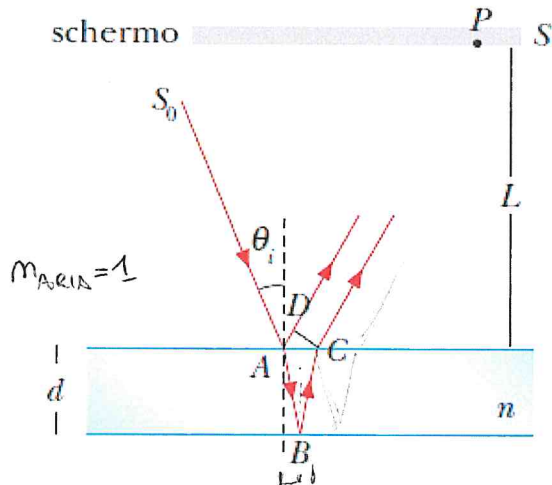
Dal confronto tra i diversi comportamenti con due sorgenti coerenti e incoerenti si conclude che:

la coerenza tra due sorgenti di potenza p opera una ridistribuzione della potenza complessiva $p_R = 2p$ emessa dalle due sorgenti, che viene concentrata in certe direzioni e rarefatta in altre, nel rispetto però della conservazione dell'energia.

In natura è possibile osservare diversi casi di interferenza di onde elettromagnetiche.

L'interferenza dovuta alla riflessione della luce del Sole sulle due superfici di una lamina sottile di una sostanza trasparente è forse il caso di interferenza più facilmente osservabile nella vita comune. Storicamente, la prima osservazione documentata di frange d'interferenza avvenne in questo modo ad opera di Boyle (1663) e, pochi anni dopo, di Newton.

Tali effetti si osservano comunemente sugli strati sottili di olio sull'acqua, sulle bolle di sapone, sulla pellicola d'acqua lasciata dalla pioggia sui vetri di una macchina.



Supponiamo di volere osservare gli effetti prodotti dalla riflessione della luce proveniente da una sorgente S_0 su una lamina spessa d , formata da una sostanza trasparente di indice di rifrazione n , posta in aria, su uno schermo S posto ad una certa distanza L dalla lamina e ad essa parallelo. La luce che incide in A sulla superficie superiore della lamina con angolo d'incidenza θ_i dà origine in A a un'onda riflessa e un'onda trasmessa che si propaga nella lamina nella direzione θ_t , determinata dalla legge di Snell $\sin\theta_t = \sin\theta_i/n$; nel punto B della superficie inferiore della lamina l'onda trasmessa dà origine a un'onda trasmessa e a

un'onda riflessa che riattraversa la lamina. Nel punto C della superficie superiore della lamina si ha la formazione di un'onda trasmessa in aria nella stessa direzione della prima onda riflessa e un'onda riflessa, da cui hanno origine, per riflessioni successive sulle due facce della lamina, altre onde. Ci si limita normalmente, come in figura, alle prime due onde, perché le onde successive hanno intensità molto piccola rispetto alle prime due. Le sorgenti virtuali originate dalla riflessione sulla prima e seconda superficie della lamina sono due sorgenti coerenti, in quanto prodotte dalla stessa sorgente, per cui esse potrebbero produrre sullo schermo S fenomeni d'interferenza analoghi a quelli osservati nell'esperimento di Young. In questo caso la differenza di fase tra le due sorgenti è:

$$\delta = 2dkn\cos\theta_t - \pi \quad \rightarrow \text{per riflessione} \quad (15.34)$$

da $m_1 < m_2$ si inverte il ϕ_{corrip}

dove il primo termine a secondo membro, con $k = 2\pi/\lambda$, è la differenza di fase dovuta alla differenza di percorso delle due onde $\Delta r = (ABC - AD)$, e π la differenza di fase prodotta solo alla riflessione in A (la riflessione da un mezzo $n_1 < n_2$ inverte la direzione del campo, ovvero lo sfasa di π).

Di natura simile sono le frange di interferenza che si possono osservare su un sottile strato e.g. di olio



ESEMPIO: Trasmissione di un sistema di due antenne

Un sistema di $N = 2$ antenne, ciascuna di potenza $p_1 = 100$ kW (isotropica), distanti $d = 10$ m una dall'altra, emette onde elettromagnetiche sferiche sincrone di frequenza $\nu = 3 \cdot 10^7$ Hz. Calcolare le figure d'interferenza prodotte dal sistema alla distanza $L = 10$ km dal sistema stesso, nel piano delle antenne.

Soluzione: Alla distanza $L = 10$ km l'intensità di ciascuna antenna è $I_1 = p_1/4\pi L^2 = 7.96 \cdot 10^{-5}$

$[W/m^2]$, a cui corrisponde l'ampiezza del campo elettrico $E_1 = \sqrt{2I_1/c\epsilon_0} = 0.245$ V/m e del campo magnetico $B_1 = E_1/c = 8.17 \cdot 10^{-10}$ T.

$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ Intensità d'onda oscillante
onda piana

La lunghezza d'onda è $\lambda = c/\nu = 10$ m, uguale a $d = \lambda$. Si hanno massimi principali nelle direzioni:

$$\sin \theta = m \rightarrow m = 0 \quad \theta = 0, \quad m = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

In queste direzioni:

$$I_{\max} = 4I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2,$$

$$E_{\max} = 2E_1 = 0.49 \text{ V/m}$$

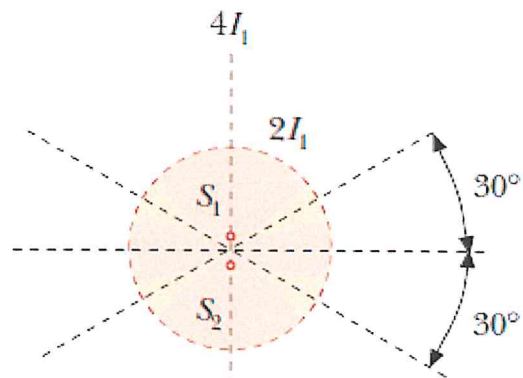
$$B_{\max} = 2B_1 = 1.63 \cdot 10^{-9} \text{ T};$$

$\sin \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2d}$
i minimi d'interferenza si hanno nelle direzioni:

$$\frac{\lambda}{d} = 1 < 2 \Rightarrow \sin \theta = m' + 0.5 \Rightarrow m' = 0, \theta = 30^\circ$$

L'espressione analitica della $I(\theta)$ è dunque:

$$I_R(\theta) = 4I_1 \cos^2(\pi \sin \theta) = 4I_1 \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right)$$



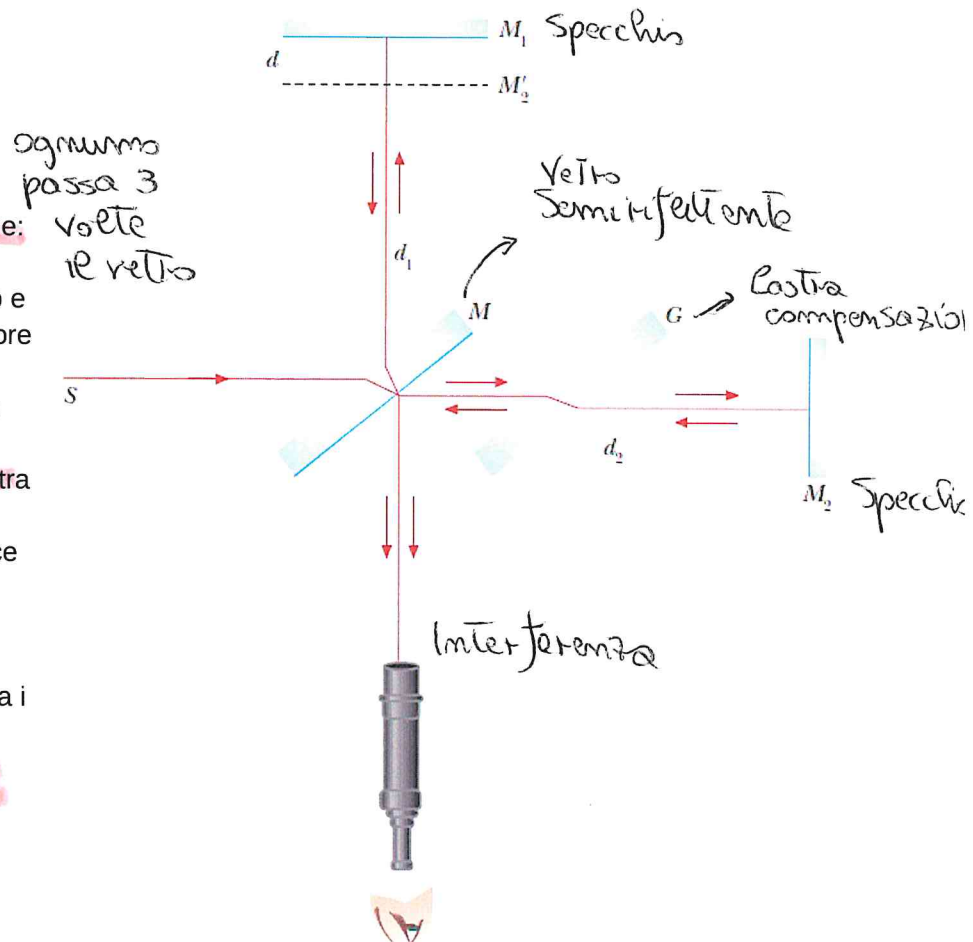
In figura è rappresentato il diagramma polare ottenuto riportando per ogni angolo θ (formato con l'asse orizzontale dalla retta che unisce l'origine con il punto in cui si osserva il campo) un punto la cui distanza dal centro è direttamente proporzionale a $I_R(\theta)$.

La potenza complessiva emessa dal sistema, che si otterrebbe integrando la $I_R(\theta)$ su tutto l'angolo solido, risulta $p = 2p_1$, perché l'interferenza agisce solamente sull'intensità variandone la sua forma ma non sulla potenza del sistema, la stessa sia che le sorgenti siano coerenti o incoerenti. Infatti se le sorgenti sono incoerenti l'intensità risulta costante in tutte le direzioni. In figura il diagramma polare nel caso di sorgenti incoerenti è rappresentato da una sfera di raggio $2I_1$: l'intensità è costante in tutte le direzioni.

Interferometro di Michelson

Il fenomeno dell'interferenza ha moltissime applicazioni tecniche e scientifiche. Uno strumento in particolare, detto interferometro, sfrutta il fenomeno per effettuare misure molto precise di velocità, tempo o distanza (e.g. interferometri onde gravitazionali). Un famoso esempio è dato dal l'interferometro di Michelson; è costituito da due specchi M_1 e M_2 , il primo fisso e il secondo mobile, da una lastra di vetro M avente una faccia semiriflettente e da una seconda lastra di vetro G , dello stesso spessore di M . Un fascio di luce proveniente dalla sorgente estesa lontana S attraversa la lastra M e incide sulla faccia semiriflettente: una parte è riflessa verso lo specchio M_1 , una parte eguale è trasmessa verso lo specchio M_2 , che raggiunge passando attraverso la lastra G . I fasci riflessi dagli specchi tornano verso la faccia semiriflettente di M : quello proveniente da M_1 , parzialmente trasmesso, e quello proveniente da M_2 , parzialmente riflesso, arrivano attraverso un telescopio sulla retina dell'osservatore, dove interferiscono; essi sono coerenti in quanto ottenuti da un'unica sorgente per divisione di ampiezza.

La lastra G , detta lastra di compensazione, fa sì che entrambi i raggi che interferiscono attraversino lo stesso spessore di vetro, eliminando effetti di dispersione: infatti se non ci fosse G la differenza di fase tra un raggio e l'altro dovuta al diverso spessore di vetro attraversato dipenderebbe dalla lunghezza d'onda, perché l'indice di rifrazione dipende da λ . La lastra G è dunque necessaria se si illumina con luce bianca; in luce monocromatica non sarebbe indispensabile, però è utile mantenerla in quanto così la differenza di cammino ottico tra i raggi dipende, con qualsiasi illuminazione, soltanto da $d_1 - d_2$, eguale alla differenza tra i cosiddetti bracci dell'interferometro.

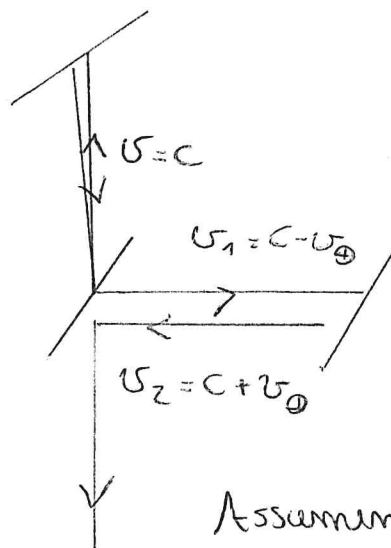


Se i due specchi sono esattamente perpendicolari tra loro, l'effetto osservato è equivalente a quello di una lamina d'aria di spessore $d = d_1 - d_2$: la luce proveniente da M_2 gioca il ruolo di luce riflessa sulla superficie inferiore della lamina, quella proveniente da M_1 di luce riflessa sulla faccia superiore

della lamina. Nella figura la lamina d'aria equivalente è quella sotto lo specchio M1 e la linea tratteggiata, bordo inferiore della lamina, è l'immagine di M2 data dallo specchio semiriflettente.

Anche se molto più elaborato nella pratica, fu questo il metodo seguito da Michelson per confrontare la lunghezza del metro campione con la lunghezza d'onda di una riga rossa emessa da atomi di cadmio ($\lambda = 648.84722 \text{ nm}$); egli trovò che il metro era pari a $1.5531635 \cdot 10^6$ di tali lunghezze d'onda, con un errore relativo stimato di $\sim 3 \cdot 10^{-7}$. In tal modo Michelson pose le basi per la definizione ottica dell'unità di lunghezza, adottata nel 1960.

Un risultato concettualmente fondamentale ottenuto con l'interferometro di Michelson fu la prova che la velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento, esperimenti di Michelson e Morley, conclusi nel 1887. Supponiamo che il percorso MM2 sia parallelo alla velocità della Terra, e quindi il percorso MM1 ortogonale a questa velocità. Per una data lunghezza geometrica dei percorsi si calcola quale deve essere la figura di interferenza tenendo conto del fatto che la velocità c della luce dovrebbe comporsi con la velocità v della Terra risultando ad esempio $v_1 = c - v$ nel tratto MM2 e $v_2 = c + v$ nel tratto M2M: lo sfasamento tra le onde che interferiscono deve cioè essere determinato inserendo gli appropriati valori di velocità di propagazione v_1 e v_2 della luce in accordo con la composizione galileiana delle velocità, in entrambi i bracci. Una rotazione di 90° dell'interferometro, che giace in un piano orizzontale, scambia il ruolo dei due percorsi MM2 e MM1 e si dovrebbe osservare uno spostamento delle frange, essendo variato lo sfasamento tra le onde che interferiscono. Lo spostamento atteso era di circa mezza frangia, ma gli autori non riuscirono ad osservare nessuno spostamento. L'esperimento fu ripetuto nelle più diverse condizioni, sempre con lo stesso risultato, e portò alla conclusione, posta da Einstein come una delle basi della teoria della relatività ristretta, che la velocità della luce è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.



$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi v}{v}$$

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \sum_0 \sin(kr - \omega t) = \\ &= \sum_0 \sin\left(\omega \left[\frac{r}{v} - t\right]\right) \end{aligned}$$

Assumendo bracci stessa lunghezza

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= k_1 r + k_2 r - 2kr \\ &= (k_1 + k_2 - 2k) r \\ &= \frac{\omega}{c - v_{\oplus}} + \frac{\omega}{c + v_{\oplus}} - 2\frac{\omega}{c} = \omega \left(\frac{1}{c - v_{\oplus}} + \frac{1}{c + v_{\oplus}} - \frac{2}{c} \right) \end{aligned}$$

✗ Interferometri Onde Gravitazionali:

→ Anche le perturbazioni dello spazio Tempo si propagano come onde (che viaggiano a c !)

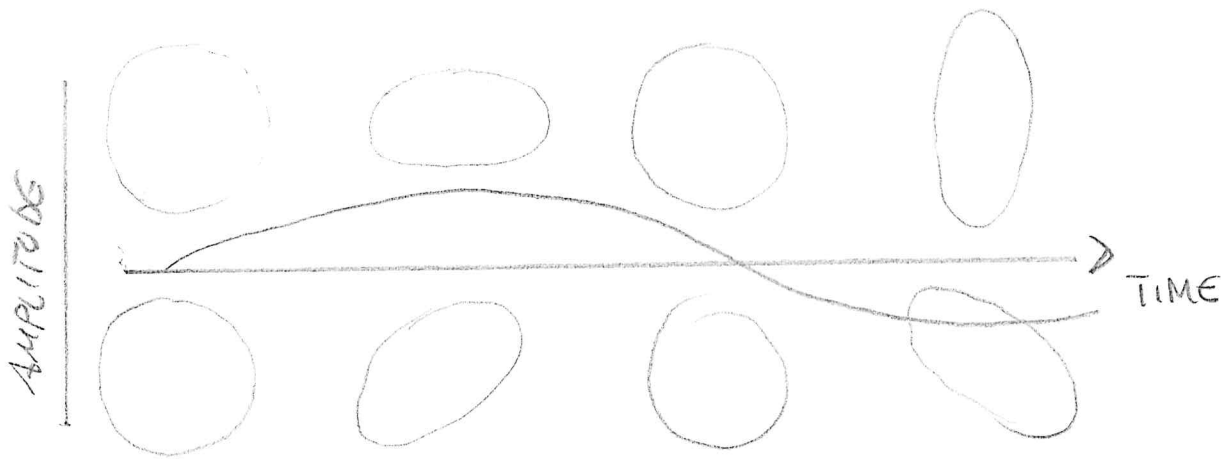
$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (c=1)$$



Tensore che descrive
la metrica dello spaziotempo

Si deriva dall'eq.ne di Einstein della relatività Generale

→ 2 possibili polarizzazioni: + X



$$\Rightarrow h \approx \frac{\Delta L}{L} \sim 10^{-21}$$

↓
Vedi eq.ne
pagina dopo

⇒ ovvero la variazione di
lunghezza relativa per
il passaggio di un'onda
gravitazionale "tipica" di
un evento di coalescenza
è dell'ordine di 10^{-21} !

→ Questo implica che devo costruire interferometri con bracci molto lunghi per sperare di osservare il passaggio di un'onda G.

e.g. LIGO ^{→ Gravitational Wave}
 ↙ laser ↘ osservatori
 ↓
 Interferometer

$$L \sim 4 \text{ km} \rightarrow \Delta L \sim 10^{-16} \text{ cm}$$

$\frac{1}{1000}$ Raggio Atomo

→ Prima osservazione 14 Sept 2015 (BH+BH merger) *

Amplitude Wave

$$h \propto \frac{1}{D_L} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} \Omega^{2/3}$$

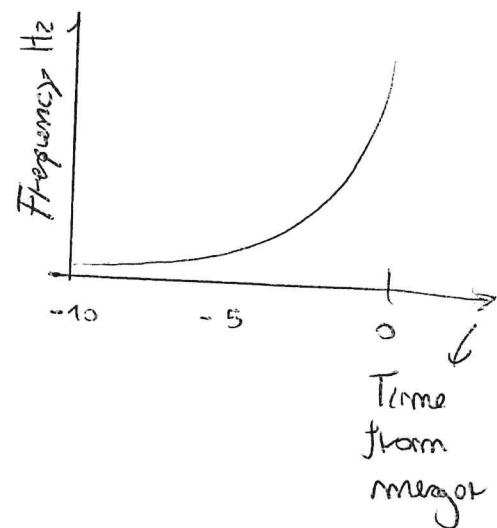


Frequency Sweep

$$\frac{d\Omega}{dt} \propto \left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3} \right)^{5/3}$$

Chirp Mass

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$



* Osservazioni indirette del fenomeno si