

Interferenza prodotta da N sorgenti di onde coerenti:

Consideriamo N sorgenti eguali di onde cilindriche, coerenti, disposte lungo una retta ed equispaziate di una distanza d. Supponiamo di osservare la loro interferenza ad una distanza molto grande rispetto alla dimensione lineare (N - 1) d del sistema, così da poter utilizzare le stesse approssimazioni introdotte in precedenza. Detto θ l'angolo formato tra la direzione di osservazione e la normale alla linea contenente le sorgenti, tra due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la differenza di fase:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta ,$$

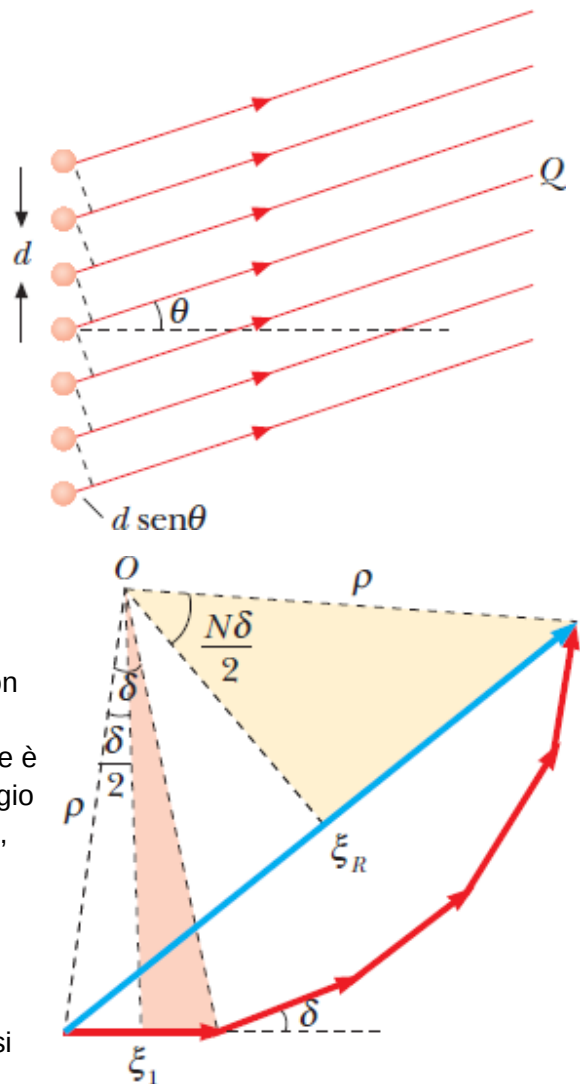
In un punto Q le ampiezze ξ_1 delle singole onde sono eguali, data la lontananza di Q dal sistema di sorgenti; non sono invece eguali le fasi, a causa delle differenze di cammino. Per calcolare l'ampiezza risultante ξ_R utilizziamo il metodo dei vettori rotanti. Con riferimento alla figura a lato, le singole ampiezze si dispongono lungo una poligonale regolare di N lati, che è circoscrivibile con una circonferenza di centro O e raggio ρ ; l'angolo al centro che sottende il singolo vettore è δ , quello che sottende la poligonale è $N\delta$. Pertanto:

$$\xi_1 = 2\rho \sin \frac{\delta}{2} , \quad \xi_R = 2\rho \sin \frac{N\delta}{2}$$

e combinando queste relazioni ($2\rho = \xi_1 / \sin(\delta/2)$) si ha il valore dell'ampiezza risultante in funzione dell'ampiezza ξ_1 di ciascuna sorgente e dello sfasamento δ tra due onde emesse da sorgenti consecutive:

$$\xi_R = \xi_1 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} .$$

L'intensità dell'onda risultante nel punto Q è proporzionale al quadrato di ξ_R :



$$I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} \right)^2 = I_1 \left(\frac{\frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 ;$$

IR presenta nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi/2$ un certo numero di massimi principali d'intensità, caratterizzati dalle proprietà:

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = m\pi \Rightarrow d \sin \theta = m\lambda \quad , \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{\max} = N^2 I_1 \quad , \quad \xi_{\max} = N \xi_1 \quad .$$

L'intensità in queste condizioni è massima e vale $I_{\max} = N^2 I_1$, in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{N \cos Nx}{\cos x} = N \Rightarrow \xi_R = N \xi_1 \quad , \quad I_R = N^2 I_1 \quad .$$

L'intensità $I_R(\theta)$ si annulla quando si annulla il numeratore, ma non il denominatore: $N\pi d \sin \theta / \lambda = m'\pi$, ovvero:

$$\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda} = m'\pi \Rightarrow d \sin \theta = m' \frac{\lambda}{N} \quad , \quad \sin \theta = m' \frac{\lambda}{Nd}$$

$$m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \quad ,$$

dovendosi escludere i valori 0, N, 2N, ... per i quali si hanno i massimi principali. Tra due massimi principali si hanno dunque $N-1$ minimi nei quali $I = 0$.

Essendo l'intensità una funzione di θ sempre positiva, tra due minimi deve esistere un massimo, detto secondario, e di conseguenza tra due massimi principali ci sono $N-2$ massimi secondari.

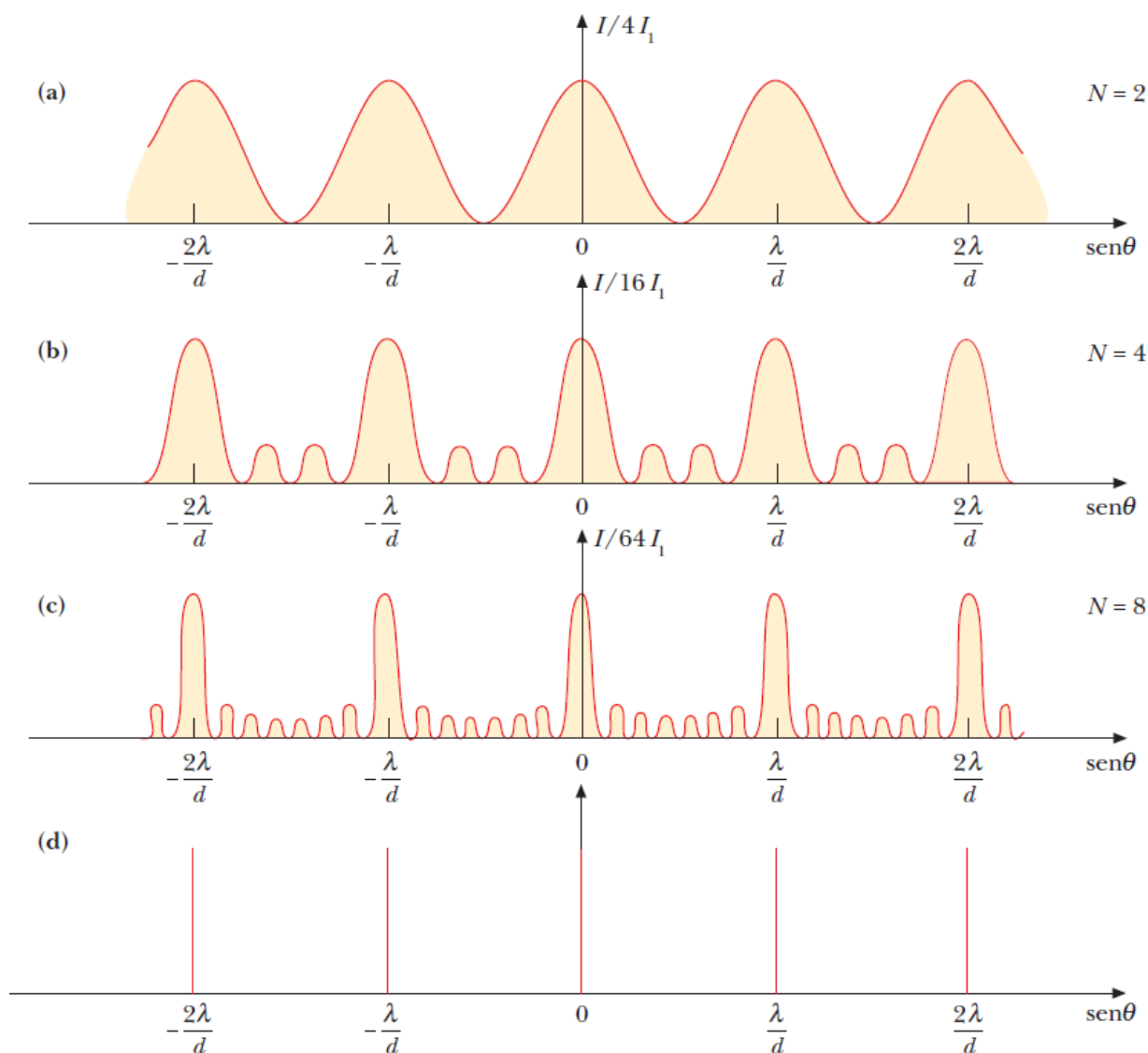
Le posizioni dei massimi secondari si ottengono quando il numeratore vale 1 ovvero in corrispondenza a:

$$\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda} = (2m''+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow d \sin \theta = (2m''+1) \frac{\lambda}{2N} \quad ,$$

$$\sin \theta = (2m''+1) \frac{\lambda}{2Nd} \quad m'' = 1, 2, \dots, N-2, N+1, \dots, 2N-2, 2N+1, \dots$$

Il valore dell'intensità dei massimi secondari è:

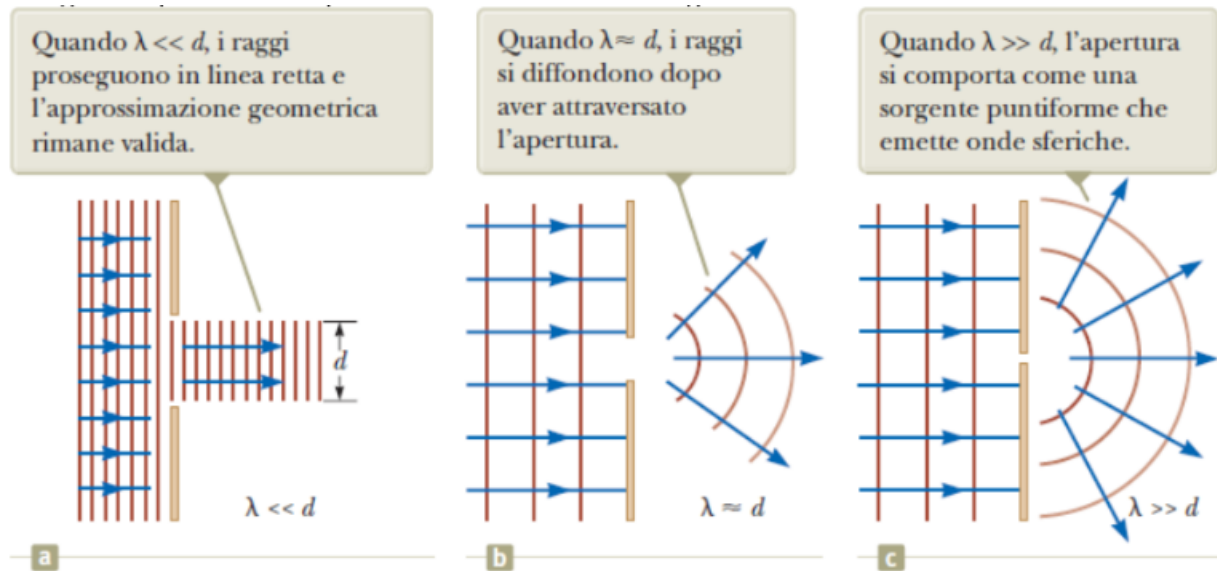
$$I_m = \frac{I_1}{\left[\sin \frac{(2m''+1)\pi}{2N} \right]^2} = \frac{I_{\max}}{N^2 \left[\sin \frac{(2m''+1)\pi}{2N} \right]^2} \quad .$$



1. la direzione dei massimi principali, verso la quale è concentrata la maggior parte della potenza emessa, è determinata dal rapporto λ / d e non dipende dal numero N di sorgenti. Il numero di massimi principali è dato dal più grande dei valori di m per il quale $\text{sen}\theta = m\lambda/d$ non supera l'unità e non dipende da N ;
2. l'intensità dei massimi principali dipende dal numero N delle sorgenti e cresce con questo secondo $I_{\text{max}} = N^2 I_1$;
3. l'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di N ;
4. gli $N - 1$ minimi e gli $N - 2$ massimi secondari compresi tra due massimi principali sono equispaziati nella variabile $\text{sen}\theta$: l'intervallo tra un minimo e un massimo secondario è $\lambda/2 Nd$, l'intervallo tra due estremi consecutivi dello stesso tipo è λ / Nd . L'intensità dei massimi secondari decresce come $1/N^2$ all'aumentare di N : in pratica per N abbastanza grande si ha intensità solo nei massimi principali. Inoltre, l'intensità dei massimi secondari varia col numero d'ordine m del massimo.

Diffrazione:

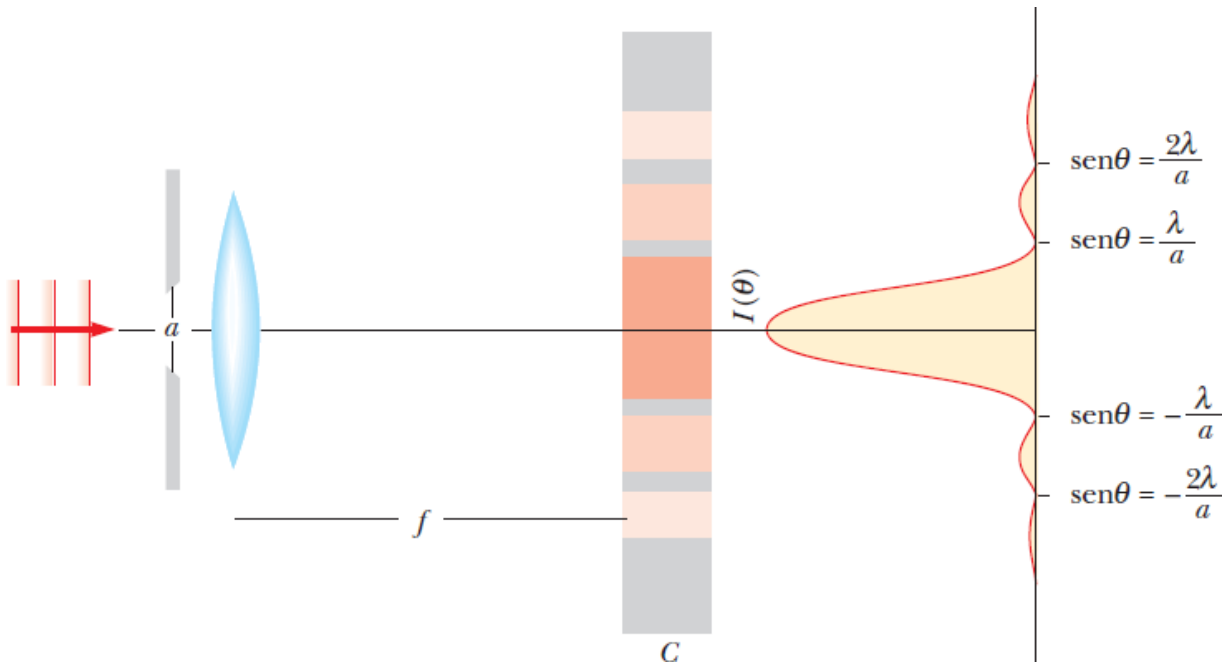
Il fenomeno della diffrazione si ha quando un'onda attraversa una fenditura di dimensioni paragonabili alla sua lunghezza d'onda. In questo caso l'onda devia dalla propagazione rettilinea e si diffonde in più direzioni. Il fenomeno è tanto più evidente tanto minore è l'apertura della fenditura rispetto alla lunghezza d'onda



Qualitativamente, nello spazio oltre l'ostacolo o l'apertura le onde si propagano anche lungo direzioni diverse da quella di incidenza e hanno origine differenze di cammino tra onde che si sovrappongono in un dato punto; possono quindi avvenire fenomeni di interferenza con conseguente redistribuzione dell'energia nei punti dello spazio, da cui risultano le caratteristiche figure di diffrazione. I fenomeni di diffrazione si verificano con tutti i tipi di onde; essi si osservano facilmente nel caso delle onde sulla superficie di un liquido e delle onde sonore, aventi lunghezze d'onda prossime alle dimensioni di molti oggetti comuni. Più difficile è l'osservazione nel caso delle onde luminose, proprio a causa della piccola lunghezza d'onda ($\lambda = 0.4 \div 0.7 \text{ }\mu\text{m}$);

Diffrazione ad una fenditura rettilinea:

Consideriamo una situazione comune, in cui la luce passa attraverso una stretta apertura, assimilabile a una fenditura, ed è proiettata su uno schermo. Come modello semplificato assumiamo che lo schermo di osservazione sia lontano dalla fenditura, cosicché i raggi che raggiungono lo schermo siano approssimativamente paralleli. In questo modello, la figura sullo schermo si chiama figura di diffrazione di Fraunhofer. Nella figura la fenditura si sviluppa ortogonalmente al disegno.

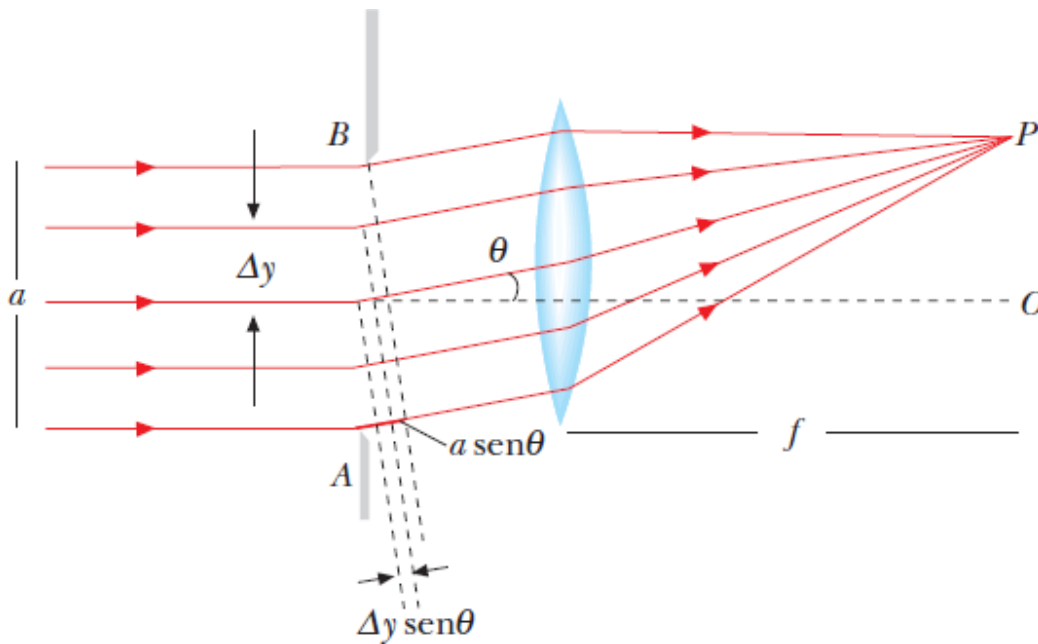


Tale fenditura è illuminata da un'onda piana di lunghezza d'onda λ , con il fronte d'onda parallelo al piano contenente la fenditura. La figura di diffrazione di Fraunhofer è osservata su uno schermo C, posto nel piano focale di una lente convergente. Essa consta di una frangia chiara centrale e di frange chiare laterali con intensità rapidamente decrescente allontanandosi dal centro, intervallate da frange scure. Diminuendo la larghezza a della fenditura la frangia centrale si allarga, ovvero il sistema di frange si dilata.

Per spiegare il fenomeno osservato, e con riferimento alla figura sottostante, suddividiamo la fenditura in N strisce, ciascuna di larghezza $\Delta y = a/N$. In base al principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff, ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con ampiezza ΔE al campo elettrico risultante E_P in un punto P dello schermo individuato dai raggi uscenti ad angolo θ rispetto alla normale al piano della fenditura. I contributi ΔE relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto P la differenza di fase:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta ,$$

derivante dalla differenza di cammino $\Delta y \sin\theta$.



Per il calcolo dell'ampiezza del campo elettrico risultante E_p si utilizza il metodo dei fasori. Con riferimento alla figura a lato, gli N fasori che rappresentano i contributi delle singole sorgenti secondarie, in cui si è suddivisa la fenditura, costituiscono una poligonale regolare di N lati; l'angolo formato tra ciascun fasore e il successivo è $\Delta\phi$. La differenza di fase tra l'onda emessa dall'estremo B e l'estremo A della fenditura è:

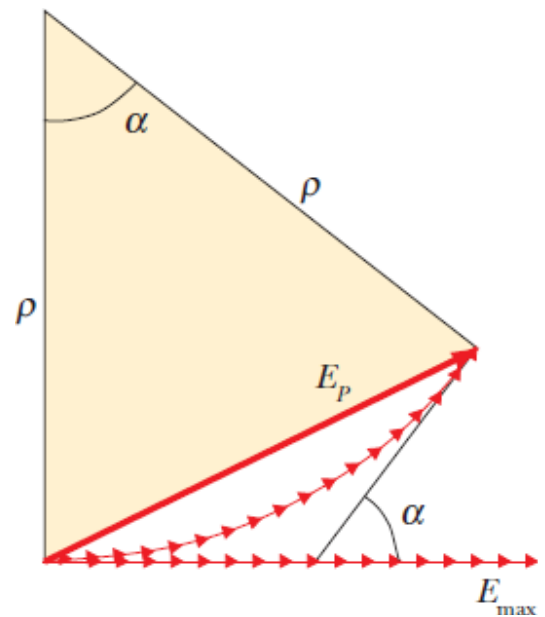
$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta ,$$

pari all'angolo tra il primo fasore e l'ennesimo.

Si passa al limite facendo tendere Δy a zero e N all'infinito: la poligonale diventa un arco di circonferenza di raggio ρ con angolo al centro pari a α . Dalla figura risulta che l'ampiezza del campo elettrico risultante E_p , pari alla corda che sottende l'arco, è:

$$E_p = 2 \rho \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{E_{\max}}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Dove $E_{\max} = \rho\alpha$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza, e corrisponde all'ampiezza massima che si osserva al centro dello schermo, quando $\theta = 0$ e tutte le onde emesse dalle singole strisce sono in fase. L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza:



$$I(\theta) = I_{\max} \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} \left[\frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2.$$

La funzione $I(\theta)$ è mostrata in figura a lato per i valori $a = 10\lambda$, $a = 5\lambda$, $a = \lambda$.

L'intensità trasmessa dalla fenditura si annulla nei cosiddetti minimi di diffrazione, quando:

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = m\pi, \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

I primi minimi, a destra e a sinistra del massimo centrale, si hanno per $\sin \theta = \pm \lambda / a$ e la quantità $\Delta(\sin \theta) = 2 \lambda / a$ si chiama larghezza "angolare" del massimo centrale di diffrazione. Si vede che per $a \gg \lambda$ il massimo è molto stretto e l'effetto della diffrazione è quasi trascurabile, ma che il massimo si allarga se a diminuisce tendendo a λ . Se fosse $a = \lambda$ il primo ed unico minimo si formerebbe a $\theta = 90^\circ$ e con $a < \lambda$ l'intensità non si annullerebbe mai: cioè con $a \leq \lambda$ tutto lo spazio al di là della fenditura è illuminato. Tra due minimi d'intensità esiste un massimo secondario, la cui posizione si calcola cercando i massimi della funzione $(\sin^2 \beta) / \beta^2$, che rappresenta l'andamento dell'intensità. Con buona approssimazione questi si trovano nei massimi di $\sin^2(\pi a \sin \theta / \lambda)$, ovvero quando:

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pm (2m' + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \sin \theta = \pm (2m' + 1) \frac{\lambda}{2a} \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

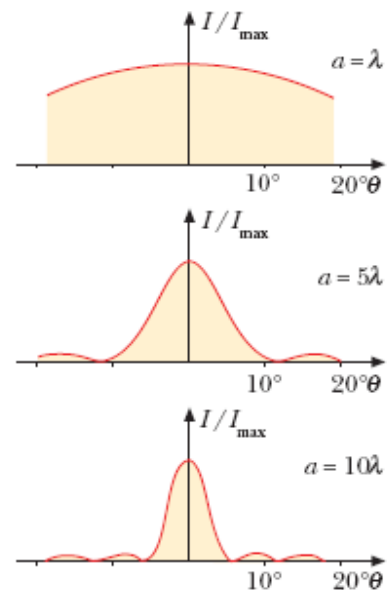
L'intensità dei massimi secondari risulta pertanto:

$$\frac{I_{m'}}{I_{\max}} = \frac{1}{\left[(2m' + 1) \frac{\pi}{2} \right]^2} \simeq \frac{0.4}{(2m' + 1)^2}.$$

Già nel primo massimo $m' = 1$, $I_1/I_{\max} = 0.045$, ovvero l'intensità è il 4.5% rispetto al massimo principale; per $m' = 2$, $I_1/I_{\max} \approx 0.016$, per $m' = 3$, $I_1/I_{\max} \approx 0.008$.

Si dimostra che la maggior parte della potenza ($\sim 80\%$) è concentrata nella frangia centrale, per cui si dice che questa rappresenta l'immagine della fenditura. La larghezza angolare dell'immagine nelle condizioni quasi sempre verificate ($\lambda \ll a$) diviene:

$$\Delta \theta = \frac{2\lambda}{a}.$$



Quando l'apertura attraverso cui facciamo passare l'onda piana incidente è circolare la figura di diffrazione, per ragioni di simmetria, consta di un disco luminoso centrale circondato da una serie di corone circolari alternativamente scure e chiare. Queste frange, osservate in condizioni di Fraunhofer, presentano molte analogie con quanto visto nel caso dell'apertura rettilinea. Si trova in particolare che l'angolo a cui cade il primo minimo di intensità, corrispondente al bordo del disco centrale della figura di diffrazione è dato da:

$$\sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R} ,$$

se D e R sono rispettivamente il diametro e il raggio dell'apertura circolare. Questa formula va confrontata con la (14.5) che dà, per una fenditura rettilinea larga α , $\sin\theta = \lambda/\alpha$ come direzione lungo cui si ha il primo minimo.

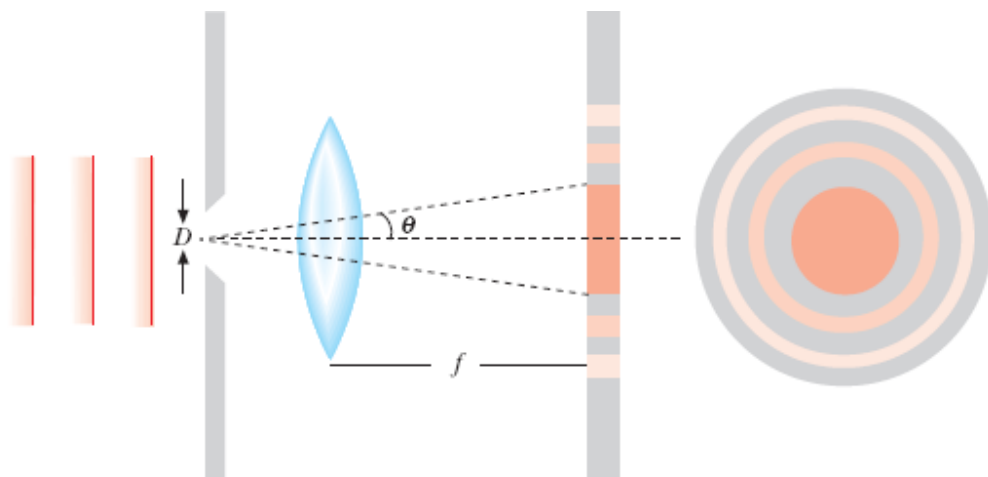
In molte applicazioni, e in particolare per le onde luminose, $\lambda \ll D$ e si può scrivere

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R} ;$$

2θ è la larghezza angolare del massimo centrale.

Anche ora si verifica che oltre l'80% dell'energia trasmessa dall'apertura è concentrata nel disco centrale luminoso, per cui gli anelli chiari concentrici al massimo centrale non sono ben visibili.

Si può dire che il disco centrale, il cui bordo è visto dal centro del foro sotto l'angolo 2θ , rappresenta l'immagine del foro stesso.



Nota: la dipendenza da λ della posizione dei massimi/minimi fa sì che, se la luce incidente non è monocromatica, la figura di diffrazione formata dalle diverse lunghezze d'onda non sia uguale. In particolare, mentre al centro dell'immagine, $\theta=0$, si realizza la condizione di massimo d'interferenza indipendentemente da λ , lunghezze d'onda maggiori hanno i minimi e massimi secondari ad una distanza angolare maggiore dal centro

